Matematikai Lapok

2015/2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 21. évfolyam (2015), 2. szám

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12., I/4. Telefon: 225-8410.
E-mail: bolyai.tarsulat@renyi.mta.hu.

Ára:
– A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes;
– nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

A Matematikai Lapok megjelenését támogatja a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága. A folyóiratot az MTMT indexeli, és a REAL archiválja.

ÚJ KORLÁTOK 3 RÉSZES SPERNER-CSALÁDOKRA*

MÉSZÁROS ANDRÁS

Ebben a dolgozatban új alsó és felső korlátokat adunk a 3 részes Sperner-családok méretére. Megmutatjuk, hogy 1,05 $< d_3 <$ 1,0722. Továbbá megcáfoljuk Aydinian, Czabarka, Erdős, Székely sejtését a maximális k-részes Sperner-családokkal kapcsolatban, amikor minden rész mérete $2^\ell - 1$.

1. Bevezetés

Sperner [10] a következő számelméleti kérdést vetette fel 1928-ban. Legyen $N = p_1p_2 \dots p_n$ egy négyzetmentes egész (azaz $p_1, p_2, \dots, p_n$ különböző prímek). Legfeljebb hány különböző osztója választható ki N-nek úgy, hogy ezek az osztók egymásnak nem osztói. Mivel egy osztó a $p_1, p_2, \dots, p_n$ számok egy részhalmazának szorzata, az osztók helyett tekinthetjük a $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ halmaz részhalmazait. Ezekből kell kiválasztanunk a legtöbb különbözőt úgy, hogy azok ne legyenek egymás részhalmazai. Ha kiválasztjuk az összes k-elemű részhalmazt, azok között nyilvánvalóan nem lesz tartalmazás. Tehát $\binom{n}{k}$ részhalmaz kiválasztható a feltételnek megfelelően minden k-ra. Ezen binomiális együtthatók közül a legnagyobb az, ahol $k = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$. Tehát az összes $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$-es halmaz jó választásnak tűnik. Sperner bebizonyította, hogy ennél több halmaz nem is választható ki tartalmazások nélkül.

1.1. tétel ([10]). *Egy n-elemű X halmaz részhalmazaiból legfeljebb*

$$\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \tag{1}$$

különböző választható ki úgy, hogy azok egyike se tartalmazzon egy másikat.

Katona és Kleitman egymástól függetlenül észrevették, hogy ugyanez a korlát akkor is érvényes, ha az X alaphalmazt kettéosztjuk, és csak olyan tartalmazásokat tiltunk meg, amelyek az egyik részben egybeesnek.

*A Moscow Journal of Combinatorics and Number Theoryban megjelent cikk magyar változata.

1.2. tétel ([7], [9])**.** *Legyen X egy véges, n-elemű halmaz, $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ egy tetszőleges partíciója. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ az X részhalmazainak egy olyan családja, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$ és $A \subset B$, $(A \neq B)$, akkor vagy $A \cap X_1 \neq B \cap X_1$, vagy $A \cap X_2 \neq B \cap X_2$ teljesül. A halmazok száma, azaz $\mathcal{F}$ mérete nem lehet* (1)*-nél több.*

Ugyancsak ők észrevették azonban azt is, hogy 3 részre már nem igaz az állítás. Legyen például $X = \{1, 2, 3\}$, a három rész $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, a halmazok pedig $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ és $\{1, 2, 3\}$. Ezen négy halmazból nincs kettő, amely két részben egyezne, viszont $4 > \binom{3}{1}$.

Tekintsük most általosan a Sperner-problémát k rész esetére. Legyen X egy véges halmaz, jelölje $\mathcal{P}(X)$ a hatványhalmazát. Tekintsünk X-nek egy $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$ partícióját k páronként diszjunkt halmazra. Egy $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazcsaládot *k-részes Sperner-családnak* nevezünk X-en erre a partícióra nézve, ha nincs két különböző F_1, F_2 eleme $\mathcal{F}$-nek, amelyekre $F_1 \subset F_2$ és $F_2 \backslash F_1 \subset X_j$ valamely $1 \leq j \leq k$-re.

Legyen $|X_i| = n_i \geq 0, n = |X| = \sum_{i=1}^{k} n_i$. A maximális k-részes Sperner-család méretét X-en jelöljük $g(n_1, n_2, \ldots, n_k)$-vel. Legyen $f(n, k)$ a $g(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ maximuma az n_i-k összes lehetséges választása közül. (Az a sejtés, hogy ez a maximum a kiegyensúlyozott esetben vétetik fel, azaz amikor az n_i-k majdnem egyenlőek.)

Ezzel a jelöléssel a Sperner-tétel: $f(n, 1) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Katona [7] és Kleitman [9] eredménye (kétrészes Sperner-tétel):

$$g(n_1, n_2) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Bizonyításukban fontos szerepet játszottak a szimmetrikus láncfelbontások. Legyen X egy véges halmaz, ekkor részhalmazainak egy $(A_1, A_2, \ldots, A_h)$ sorozata egy h hosszú *szimmetrikus lánc,* ha $A_i \subset A_{i+1}$, $|A_{i+1} \backslash A_i| = 1$ minden $1 \leq i \leq h-1$-re és $|A_1| + |A_h| = |X|$. *Szimmetrikus láncfelbontáson* $\mathcal{P}(X)$ egy partícióját értjük szimmetrikus láncokra. Ilyen mindig létezik, l. [2].

A szimmetrikus láncfelbontások segítségével is bizonyítható a Sperner-tétel, hiszen minden lánc legfeljebb egy elemét tartalmazhatja egy Sperner-családnak. Vagyis a láncok száma, ami $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ felső becslés egy Sperner-család méretére. A mi módszerünk a 3 részes Sperner-családok méretének felső becslésére valami hasonló lesz (l. 2. fejezet).

A k-részes Sperner-családokkal kapcsolatban $(k > 2)$ Füredi [5] és Griggs, Odlyzko, Shearer [6] számos tételt bizonyított. Megmutatták, hogy fix k-ra mindig létezik a $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n,k)}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$ határérték. Ezt d_k-val jelöljük. Szintén ők mutatták meg, hogy $d_k \sim \frac{\sqrt{k\pi}}{\sqrt{4 \log k}}$. Habár ismerjük d_k aszimptotikus értékét, a $k = 1$ és 2 esettől eltekintve, amikor $d_1 = d_2 = 1$, nem ismerjük d_k pontos értékét. Jó összefoglaló a témában [4] és [1].

Ebben a dolgozatban új korlátokat adunk d_3-ra. Megmutatjuk, hogy $1{,}05 < d_3 < 1{,}0722$, megjavítva az előző korlátokat (1,036 és 1,131 [4]).

Griggs, Odlyzko, Shearer megemlítették bizonyítás nélkül [6], hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n,n,n)}{\binom{3n}{\lfloor 1{,}5n \rfloor}} < 1{,}0722,$$

ahol a konstans azonos a mienkkel, mivel a kiegyensúlyozott esetet gondoljuk a maximálisnak, azt sejtették, hogy ez a korlát d_3-ra is igaz. A mi eredményünk bizonyítja ezt a sejtést. Még erősebb korlátok igazak, ha az n_i-k aránya fix.

A 2. fejezetben adunk egy felső becslést a 3 részes Sperner-családok méretére monokromatikus láncfelbontások segítségével. Lényegében ez a módszer megtalálható pl. Füredinél [5] és Katonánál [8]. Azonban ezen korlátok aszimptotikus értékének meghatározása némi technikaibb számolást igényel, ezt tartalmazza a 3. fejezet.

Az 4. fejezetben felidézzük Erdős, Katona [3] és Füredi, Griggs, Odlyzko, Shearer [6], [4] eredményét homogén családokról. Aminek következménye, hogy az optimális k-részes Sperner-család mérete megkapható, mint egy egészértékű program megoldása. Ezt megoldva a $k = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 15$ speciális esetben kiderül, hogy Aydinian, Czabarka, Erdős, Székely [1] egy sejtése, ami azon k-részes Sperner-családokra vonatkozott, ahol minden rész $2^\ell - 1$ méretű, nem igaz. Ezenfelül mutatunk egy kapcsolatot monokromatikus láncfelbontásokkal is.

A 5. fejezetben módszerünk az alsó becslésre lényegében ugyanaz, mint ami Füredi [5] és Griggs, Odlyzko, Shearer [6] cikkeiben megtalálható. De amíg ők egy explicit konstrukciót használtak, mi egy jobbat találunk számítógép segítségével.

2. Monokromatikus láncfelbontások

2.1. definíció. Legyen $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$ egy a partíciója X-nek k páronként diszjunkt halmazra. X részhalmazainak egy $(A_1, A_2, \ldots, A_h)$ sorozatát *monokromatikus láncnak* hívjuk, ha $A_i \subset A_{i+1}$ minden $i = 1, 2, \ldots, h-1$, és létezik j, amelyre $1 \le j \le k$ és $A_{i+1} \backslash A_i \subset X_j$ minden $i = 1, 2, \ldots, h-1$-ra. Itt h-t a lánc hosszának, j-t a lánc színének nevezzük.

2.2. definíció. Legyen $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$ egy partíciója X-nek k páronként diszjunkt halmazra. A monokromatikus láncok egy $\mathcal{C}$ halmazát *monokromatikus láncfelbontásnak* hívjuk, ha X minden részhalmazát pontosan egy $\mathcal{C}$-beli lánc tartalmazza.

Ha $\mathcal{F}$ egy k-részes Sperner-család X-en ($X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$ partícióra nézve), akkor minden monokromatikus lánc legfeljebb egy elemét tartalmazhatja $\mathcal{F}$-nek, amiből a következő lemma azonnal adódik.

2.3. lemma. *Ha $\mathcal{F}$ egy k-részes Sperner-család $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$-en, $\mathcal{C}$ egy monokromatikus láncfelbontása X-nek, akkor $|\mathcal{F}| \le |\mathcal{C}|$.*

Legyenek $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ és $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_m$ diszjunkt halmazok, $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ egy-egy monokromatikus láncfelbontásuk. A célunk elkészíteni egy $\mathcal{C}_1 \square \mathcal{C}_2$ monokromatikus láncfelbontását $Z = X_1 \cup \dots \cup X_k \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_m$-nek.

Legyen $(A_1, A_2, \dots, A_h)$ és $(B_1, B_2, \dots, B_g)$ egy-egy lánc rendre $\mathcal{C}_1$-ben, illetve $\mathcal{C}_2$-ben. Mutatunk $\min(h,g)$ darab $\max(h,g)$ hosszú monokromatikus láncot úgy, hogy együtt fedjék azon $g \cdot h$ darab részhalmazát Z-nek, melyek $A_i \cup B_j$ alakúak.

Ha $h \geq g$, vegyük a következő monokromatikus láncokat $1 \leq i \leq g$-re: $(A_1 \cup B_i, A_2 \cup B_i, \dots, A_h \cup B_i)$. Ha $h < g$, vegyük a következő monokromatikus láncokat $1 \leq i \leq h$-ra: $(A_i \cup B_1, A_i \cup B_2, \dots, A_i \cup B_g)$. Ha tekintjük ezeket a láncokat az összes $|\mathcal{C}_1| \cdot |\mathcal{C}_2|$ darab lehetséges monokromatikus láncpárra, akkor Z egy monokromatikus láncfelbontását kapjuk. Ezt jelöljük $\mathcal{C}_1 \square \mathcal{C}_2$-vel.

2.4. definíció. Legyen $\mathcal{C}$ egy monokromatikus láncfelbontás. Ennek *profilvektorán* a $p(\mathcal{C}) = (k_1, k_2, k_3, \dots)$ vektort értjük, ahol k_i azon láncok száma $\mathcal{C}$-ben, melyek hossza i. Ezt a következő formában is fogjuk írni: $p(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \boldsymbol{b_i}$, ahol $\boldsymbol{b_i} = (0, 0, \dots, 0, \overset{i}{\check{1}}, 0, \dots)$.

2.5. definíció. Legyen A az az $\mathbb{R}$ feletti algebra, melynek $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \dots$ lineárisan független generátorai, és a $\times$ szorzást a következőképpen definiáljuk a generátorokon: $\boldsymbol{b}_i \times \boldsymbol{b}_j = \min(i,j) \boldsymbol{b}_{\max(i,j)}$. Ez egyértelműen terjeszthető ki az egész A-ra, hogy lineáris és disztributív legyen.

A későbbiekben $u = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \boldsymbol{b}_i$ esetén használni fogjuk az $(u)_i = k_i$ jelölést. Könnyű látni, hogy A egy kommutatív, asszociatív algebra lesz. Továbbá:

2.6. lemma. *Ha $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ monokromatikus láncfelbontások, akkor $p(\mathcal{C}_1 \square \mathcal{C}_2) = p(\mathcal{C}_1) \times p(\mathcal{C}_2)$.*

2.7. definíció. Az $L : A \to \mathbb{R}$ lineáris leképezést a következőképpen definiáljuk: $u = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \boldsymbol{b}_i$-ra legyen $L(u) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i$.

Vegyük észre, hogy ha u egy monokromatikus láncfelbontás profilvektora, akkor $L(u)$ éppen a láncok számát adja a láncfelbontásban.

Legyen $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ egy 3 részre partícionált halmaz. Legyen $\mathcal{C}_i$ egy szimmetrikus láncfelbontása $\mathcal{P}(X_i)$-nek (l. az 1. fejezetet.) Ekkor $L\big(p(\mathcal{C}_1) \times p(\mathcal{C}_2) \times p(\mathcal{C}_3)\big)$ egy felső korlátot ad a 3 részes Sperner-családok méretére X-en a 2.3. lemma miatt. Jelöljük ezt a korlátot $U(m_1, m_2, m_3)$-mal, ahol $|X_i| = m_i$. Most meghatározzuk $U(2n_1, 2n_2, 2n_3)$-at.

Vizsgáljuk meg egy $2n$ elemű halmaz szimmetrikus láncfelbontásában hány $2i+1$ hosszú lánc lesz. (Azt könnyű látni, hogy csak páratlan hosszú láncok szerepelnek a láncfelbontásban.) Először azt határozzuk meg, hogy legalább $2i+1$ hosszú láncból mennyi van. Minden legalább $2i+1$ hosszú szimmetrikus lánc tartalmaz pontosan egy $n+i$ elemszámú részhalmazt, továbbá minden $n+i$ elemszámú részhalmazt pontosan egy legalább $2i+1$ hosszú szimmetrikus láncfelbontásbeli lánc tartalmazza, vagyis a legalább $2i+1$ hosszú láncok száma $\binom{2n}{n+i}$, amiből a pontosan $2i+1$ hosszúaké $\binom{2n}{n+i} - \binom{2n}{n+i+1}$, ha $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, és $2n+1$ hosszú láncból pedig 1 lesz. Amiből egy $2n$ elemű halmaz szimmetrikus láncfelbontásának p_{2n} profilvektorára a következő adódik:

$$\begin{aligned} p_{2n} &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\binom{2n}{n+i}-\binom{2n}{n+i+1}\right)\boldsymbol{b}_{2i+1}+\boldsymbol{b}_{2n+1} \\ &= \binom{2n}{n}\boldsymbol{b}_1+\sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{n+i}(\boldsymbol{b}_{2i+1}-\boldsymbol{b}_{2i-1})=\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{n+i}\boldsymbol{d}_i, \end{aligned}$$

ahol $\boldsymbol{d}_0=\boldsymbol{b}_1$ és $\boldsymbol{d}_i=\boldsymbol{b}_{2i+1}-\boldsymbol{b}_{2i-1}$. Használva $\times$ disztributivitását és L linearitását kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} U(2n_1,2n_2,2n_3) &= L(p_{2n_1}\times p_{2n_2}\times p_{2n_3}) \\ &= \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}\sum_{k=0}^{n_3}\binom{2n_1}{n_1+i}\binom{2n_2}{n_2+j}\binom{2n_3}{n_3+k}L(\boldsymbol{d}_i\times\boldsymbol{d}_j\times\boldsymbol{d}_k). \end{aligned}$$

Határozzuk meg $L(\boldsymbol{d}_i\times\boldsymbol{d}_j\times\boldsymbol{d}_k)$-et. Szimmetria okokból feltehető, hogy $i\geq j\geq k$. A következők könnyen adódnak:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{d}_0\times\boldsymbol{d}_0\times\boldsymbol{d}_0)&=1,\\ L(\boldsymbol{d}_i\times\boldsymbol{d}_i\times\boldsymbol{d}_i)&=6-4i, \quad \text{ha} \quad i>0,\\ L(\boldsymbol{d}_i\times\boldsymbol{d}_i\times\boldsymbol{d}_0)&=2, \quad \text{ha} \quad i>0,\\ L(\boldsymbol{d}_i\times\boldsymbol{d}_i\times\boldsymbol{d}_k)&=4, \quad \text{ha} \quad i>k>0,\\ L(\boldsymbol{d}_i\times\boldsymbol{d}_j\times\boldsymbol{d}_k)&=0, \quad \text{ha} \quad i>j\geq k. \end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} A(n_1,n_2,n_3) &= \sum_{i=0}^{\min(n_1,n_2)}\sum_{j=0}^{\min(n_3,i)}\binom{2n_1}{n_1+i}\binom{2n_2}{n_2+i}\binom{2n_3}{n_3+j},\\ B(n_1,n_2,n_3) &= \sum_{i=0}^{\min(n_1,n_2,n_3)}\binom{2n_1}{n_1+i}\binom{2n_2}{n_2+i}\binom{2n_3}{n_3+i}i,\\ E(n_1,n_2,n_3) &= +11\binom{2n_1}{n_1}\binom{2n_2}{n_2}\binom{2n_3}{n_3}\\ &\quad +6\sum_{i=1}^{\min(n_1,n_2,n_3)}\binom{2n_1}{n_1+i}\binom{2n_2}{n_2+i}\binom{2n_3}{n_3+i}\\ &\quad +2\sum_{i=1}^{\min(n_1,n_2)}\binom{2n_1}{n_1+i}\binom{2n_2}{n_2+i}\binom{2n_3}{n_3} \end{aligned}$$

$$+\,2\sum_{i=1}^{\min(n_1,n_3)}\binom{2n_1}{n_1+i}\binom{2n_2}{n_2}\binom{2n_3}{n_3+i}$$
$$+\,2\sum_{i=1}^{\min(n_2,n_3)}\binom{2n_1}{n_1}\binom{2n_2}{n_2+i}\binom{2n_3}{n_3+i}.$$

Ezen jelölésekkel:

$$U(2n_1,2n_2,2n_3)=4A(n_1,n_2,n_3)+4A(n_2,n_3,n_1)+4A(n_3,n_1,n_2)$$
$$-\,4B(n_1,n_2,n_3)-E(n_1,n_2,n_3). \tag{1}$$

Hogy egy közös felső korlátot nyerjünk, belátjuk a következő tételt.

2.8. tétel. *Ha $3n=n_1+n_2+n_3$, akkor $U(2n_1,2n_2,2n_3)\le U(2n,2n,2n)$.*

Ehhez további lemmákra van szükségünk:

2.9. definíció. A $\nu : A\to A$ lineáris leképezést definiáljuk a generátorokon a következőképpen: $\nu(\boldsymbol{b}_1)=\boldsymbol{b}_2$ és $\nu(\boldsymbol{b}_i)=\boldsymbol{b}_{i-1}+\boldsymbol{b}_{i+1}$, ha $i>1$, és terjesszük ki lineárisan.

2.10. lemma. $\nu\big(\nu(p_{2n})\big)=p_{2n+2}$.

Bizonyítás. Emlékezzünk, hogyan konstruáljuk $\mathcal{P}(X\cup\{t\})$ szimmetrikus láncfelbontását $\mathcal{P}(X)$-éből, l. [7]. ■

2.11. lemma. *$u=\sum_{i=1}^{\infty}k_i\boldsymbol{b}_i$ és $w=\sum_{i=1}^{\infty}\ell_i\boldsymbol{b}_i$-re: $L\big(\nu(u)\times w\big)=2L(u\times w)-\sum_{i=1}^{\infty}k_i\ell_i$.*

Bizonyítás. Figyeljük meg, hogy $L\big(\nu(\boldsymbol{b}_i)\times\boldsymbol{b}_i\big)=2L(\boldsymbol{b}_i\times\boldsymbol{b}_i)-1$, és $L\big(\nu(\boldsymbol{b}_i)\times\boldsymbol{b}_j\big)=2L(\boldsymbol{b}_i\times\boldsymbol{b}_j)$, ha $i\ne j$. Innét linearitással és disztributivitással könnyen adódik az állítás. ■

Hogy egyszerűbbek legyenek a számítások, definiáljuk $\binom{m}{m+1}$-t 0-nak.

2.12. lemma. *Fix $0\le j<k$-re a következő függvény monoton csökkenő m-ben, ahol $m\ge k$:*

$$\frac{\binom{2m}{m+j}-\binom{2m}{m+k}}{\binom{2m}{m+k}-\binom{2m}{m+k+1}}.$$

Bizonyítás. Fix $a>0$-ra a következő függvény monoton csökkenő m-ben, ha $m\ge a$:

$$\frac{\binom{2m}{m+a-1}-\binom{2m}{m+a}}{\binom{2m}{m+a}-\binom{2m}{m+a+1}}=\frac{(2a-1)(m+a+1)}{(2a+1)(m-a+1)}.$$

(Vegyük észre, hogy ez az elfajult $a=m$ esetben is igaz.)

Ilyen függvényeket összeszorozva kapjuk, hogy fix $0\le j<k$-ra a következő függvény monoton csökkenő m-ben, $(m>j)$:

$$\frac{\binom{2m}{m+j}-\binom{2m}{m+j+1}}{\binom{2m}{m+k}-\binom{2m}{m+k+1}}.$$

Ilyeneket összeadva kapjuk a lemma állítását. ■

2.13. lemma. *Ha $n_1 < n_2$, akkor $U(2n_1+2, 2n_2, 2n_3) \geq U(2n_1, 2n_2+2, 2n_3)$.*

Bizonyítás. Jelöljük p_{2n_i}-t q_i-vel. A 2.10. lemmából nekünk $L\big(\nu\big(\nu(q_1)\big) \times q_2 \times q_3\big)$-t és $L\big(\nu\big(\nu(q_2)\big) \times q_1 \times q_3\big)$-t kell összehasonlítani. Továbbá $q_2 \times q_3$ összes páros koordinátája 0, és $\nu(q_1)$ összes páratlan koordinátája 0, vagyis $L\big(\nu\big(\nu(q_1)\big) \times q_2 \times q_3\big) = 2L\big(\nu(q_1) \times q_2 \times q_3\big)$. Hasonlóan, $L\big(\nu\big(\nu(q_2)\big) \times q_3 \times q_3\big) = 2L\big(\nu(q_2) \times q_1 \times q_3\big)$. Vagyis $L\big(\nu(q_1) \times q_2 \times q_3\big) = 2L(q_1 \times q_2 \times q_3) - \sum_{i=1}^{\infty} (q_1)_i (q_2 \times q_3)_i$-t és $L\big(\nu(q_1) \times q_2 \times q_3\big) = 2L(q_1 \times q_2 \times q_3) - \sum_{i=1}^{\infty} (q_2)_i (q_1 \times q_3)_i$-t kell összehasonlítanunk.

Elegendő belátni, hogy $(q_1)_i (q_2 \times q_3)_i \leq (q_2)_i (q_1 \times q_3)_i$ minden i-re. Kibontva:

$$(q_1)_i (q_2 \times q_3)_i = i(q_1)_i (q_2)_i (q_3)_i + (q_1)_i (q_2)_i \sum_{j=1}^{i-1} j(q_3)_j + (q_1)_i (q_3)_i \sum_{j=1}^{i-1} j(q_2)_j,$$

$$(q_2)_i (q_1 \times q_3)_i = i(q_1)_i (q_2)_i (q_3)_i + (q_1)_i (q_2)_i \sum_{j=1}^{i-1} j(q_3)_j + (q_2)_i (q_3)_i \sum_{j=1}^{i-1} j(q_1)_j.$$

Néhány tag kiesik, leoszthatunk $(q_3)_i$-vel, vagyis amit be kell látnunk:

$$(q_1)_i \sum_{j=1}^{i-1} j(q_2)_j \leq (q_2)_i \sum_{j=1}^{i-1} j(q_1)_j.$$

Ha i páros, mindkét oldal nulla, tegyük föl tehát, hogy $i = 2k+1$. Ha $k > n_1$ a baloldal 0, mert $(q_1)_i = 0$, a másik oldal nemnegatív, így készen vagyunk. Feltehető tehát, hogy $k \leq n_1 < n_2$. Ha használjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{i-1} j(p_{2m+1})_j &= \sum_{j=0}^{k-1} (2j+1) \left(\binom{2m}{m+j} - \binom{2m}{m+j+1} \right) \\
&= \binom{2m}{m} + 2\sum_{j=1}^{k-1} \binom{2m}{m+j} - (2k-1)\binom{2m}{m+k} \\
&= \left(\binom{2m}{m} - \binom{2m}{m+k} \right) + 2\sum_{j=1}^{k-1} \left(\binom{2m}{m+j} - \binom{2m}{m+k} \right),
\end{aligned}$$

a bizonyítandó állítás a következő:

$$\begin{aligned}
&\left(\binom{2n_1}{n_1+k} - \binom{2n_1}{n_1+k+1} \right) \\
&\cdot \left(\left(\binom{2n_2}{n_2} - \binom{2n_2}{n_2+k} \right) + 2\sum_{j=1}^{k-1} \left(\binom{2n_2}{n_2+j} - \binom{2n_2}{n_2+k} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\binom{2n_2}{n_2+k} - \binom{2n_2}{n_2+k+1} \right)$$

$$\cdot \left(\left(\binom{2n_1}{n_1} - \binom{2n_1}{n_1+k} \right) + 2\sum_{j=1}^{k-1} \left(\binom{2n_1}{n_1+j} - \binom{2n_1}{n_1+k} \right) \right).$$

Vagyis elegendő megmutatni, hogy $0 \leq j \leq k-1$ esetén:

$$\left(\binom{2n_1}{n_1+k} - \binom{2n_1}{n_1+k+1} \right) \left(\binom{2n_2}{n_2+j} - \binom{2n_2}{n_2+k} \right)$$

$$\leq \left(\binom{2n_2}{n_2+k} - \binom{2n_2}{n_2+k+1} \right) \left(\binom{2n_1}{n_1+j} - \binom{2n_1}{n_1+k} \right).$$

Ez pedig átrendezés után következik a 2.12. lemmából, használva, hogy $n_1 < n_2$. ■

2.8. tétel bizonyítása. A 2.13. lemma a következőképpen is fogalmazható: ha $n_1 < n_2$, akkor $U(2n_1+2, 2n_2-2, 2n_3) \geq U(2n_1, 2n_2, 2n_3)$. Tegyük fel, hogy $n_1 < n$ és $n_2 > n$. Ekkor $U(2n_1, 2n_2, 2n_3) \leq U(2n_1+2, 2n_2-2, 2n_3)$, és ilyen lépésekkel elérhetünk $U(2n, 2n, 2n)$-hez, ami bizonyítja a tételt. ■

3. Aszimptotikus számolások

A következőkben meghatározzuk $\lim_{n\to\infty} \frac{U(2p_n,2q_n,2r_n)}{\binom{2s_n}{s_n}}$ értékét, ahol p_n, q_n, r_n pozitív egészek sorozatai, $s_n = p_n + q_n + r_n$, $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{s_n} = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{s_n} = \beta$ és $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{s_n} = \gamma$ valamely rögzített α, β, γ pozitív való számra, melyekre $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

A de Moivre–Laplace-tételből:

$$\binom{2m}{m+k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}} 2^{2m} \exp\left(-\frac{k^2}{m}\right).$$

Vagyis

$$\binom{2p_n}{p_n+i}\binom{2q_n}{q_n+i}\binom{2r_n}{r_n+j} \sim \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{p_n q_n r_n}} 2^{2s_n} \exp\left(-\frac{i^2}{p_n} - \frac{i^2}{q_n} - \frac{j^2}{r_n}\right)$$

$$= \frac{2^{2s_n}}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{s_n}} \sqrt{\frac{s_n}{p_n}\frac{s_n}{q_n}\frac{s_n}{r_n}} \left(\frac{1}{\sqrt{s_n}}\right)^2$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{s_n}{p_n}\left(\frac{i}{\sqrt{s_n}}\right)^2 - \frac{s_n}{q_n}\left(\frac{i}{\sqrt{s_n}}\right)^2 - \frac{s_n}{r_n}\left(\frac{j}{\sqrt{s_n}}\right)^2\right)$$

$$\sim \frac{2^{2s_n}}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{s_n}}\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}\left(\frac{1}{\sqrt{s_n}}\right)^2\cdot\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{i}{\sqrt{s_n}}\right)^2-\frac{1}{\beta}\left(\frac{i}{\sqrt{s_n}}\right)^2-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{j}{\sqrt{s_n}}\right)^2\right).$$

Itt legyen $g(x,y)=\exp\big(-\frac{1}{\alpha}x^2-\frac{1}{\beta}x^2-\frac{1}{\gamma}y^2\big)$, ekkor

$$\left(\frac{1}{\sqrt{s_n}}\right)^2\cdot\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{i}{\sqrt{s_n}}\right)^2-\frac{1}{\beta}\left(\frac{i}{\sqrt{s_n}}\right)^2-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{j}{\sqrt{s_n}}\right)^2\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{s_n}}\right)^2\cdot g\left(\frac{i}{\sqrt{s_n}},\frac{j}{\sqrt{s_n}}\right)$$

értékét az $\displaystyle\int_{x=\frac{i}{\sqrt{s_n}}}^{\frac{i+1}{\sqrt{s_n}}}\int_{y=\frac{j}{\sqrt{s_n}}}^{\frac{j+1}{\sqrt{s_n}}} g(x,y)\,dy\,dx$ integrállal közelítjük, azaz g-t az $\big(\frac{i}{\sqrt{s_n}},\frac{j}{\sqrt{s_n}}\big)$ pontot tartalmazó $\big(\frac{1}{\sqrt{s_n}}\big)^2$ területű $\big[\frac{i}{\sqrt{s_n}},\frac{i+1}{\sqrt{s_n}}\big]\times\big[\frac{j}{\sqrt{s_n}},\frac{j+1}{\sqrt{s_n}}\big]$ négyzeten integráljuk. Azaz:

$$\frac{2^{2s_n}}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{s_n}}\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}\left(\frac{1}{\sqrt{s_n}}\right)^2\cdot\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{i}{\sqrt{s_n}}\right)^2-\frac{1}{\beta}\left(\frac{i}{\sqrt{s_n}}\right)^2-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{j}{\sqrt{s_n}}\right)^2\right)$$
$$\sim\frac{2^{2s_n}}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{s_n}\sqrt{\alpha\beta\gamma}}\int_{x=\frac{i}{\sqrt{s_n}}}^{\frac{i+1}{\sqrt{s_n}}}\int_{y=\frac{j}{\sqrt{s_n}}}^{\frac{j+1}{\sqrt{s_n}}}\exp\left(-\frac{1}{\alpha}x^2-\frac{1}{\beta}x^2-\frac{1}{\gamma}y^2\right)dy\,dx.$$

Így:

$$A(p_n,q_n,r_n)=\sum_{i=0}^{\min(p_n,q_n)}\sum_{j=0}^{\min(r_n,i)}\binom{2p_n}{p_n+i}\binom{2q_n}{q_n+i}\binom{2r_n}{r_n+j}$$
$$\sim\frac{2^{2s_n}}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{s_n}\sqrt{\alpha\beta\gamma}}\sum_{i=0}^{\min(p_n,q_n)}\sum_{j=0}^{\min(r_n,i)}$$
$$\cdot\int_{x=\frac{i}{\sqrt{s_n}}}^{\frac{i+1}{\sqrt{s_n}}}\int_{y=\frac{j}{\sqrt{s_n}}}^{\frac{j+1}{\sqrt{s_n}}}\exp\left(-\frac{1}{\alpha}x^2-\frac{1}{\beta}x^2-\frac{1}{\gamma}y^2\right)dy\,dx$$
$$\sim\frac{2^{2s_n}}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{s_n}\sqrt{\alpha\beta\gamma}}\int_D\exp\left(-\frac{1}{\alpha}x^2-\frac{1}{\beta}x^2-\frac{1}{\gamma}y^2\right)dx\,dy,$$

ahol $D=\big\{(x,y)\mid x\ge 0,\ \ x\ge y\ge 0\big\}$, ahogy az 1. ábra bal oldalán látható. Itt az utolsó közelítésnél azt kell használni, hogy azon $\big[\frac{i}{\sqrt{s_n}},\frac{i+1}{\sqrt{s_n}}\big]\times\big[\frac{j}{\sqrt{s_n}},\frac{j+1}{\sqrt{s_n}}\big]$ négyzetek uniója, ahol g-t integrálnunk kell, egyre jobban közelíti D-t.

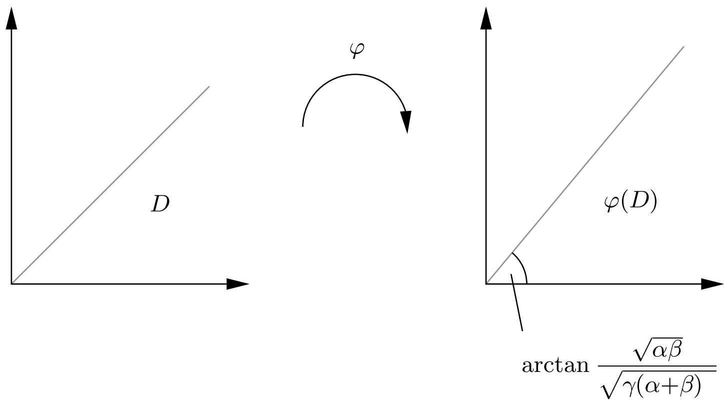
Legyen $\varphi(x,y)=\big(\frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}x,\frac{1}{\sqrt{\gamma}}y\big)$ és $F(x,y)=\exp(-x^2-y^2)$, helyettesítéses integrálással:

$$\int_{\varphi(D)}F=\int_D F\circ\varphi|\det D\varphi|.$$

Amiből kapjuk:

$$\int_D \exp\left(-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x^2 - \frac{1}{\gamma}y^2\right) dx\,dy = \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{\alpha+\beta}} \int_{\varphi(D)} \exp(-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$

A D tartomány képe φ-nél az 1. ábrán látható. $\exp(-x^2-y^2)$ integrálja az egész síkon π, vagyis az integrálja $\varphi(D)$-n éppen $\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma(\alpha+\beta)}}$.



1. ábra. A D tartomány képe

A jól ismert aszimptotikus formulával

$$\binom{2s_n}{s_n} \sim \frac{2^{2s_n}}{\sqrt{\pi s_n}},$$

amiből

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(p_n,q_n,r_n)}{\binom{2s_n}{s_n}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha+\beta}} \arctan\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma(\alpha+\beta)}}.$$

Hasonlóan kapható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B(p_n,q_n,r_n)}{\binom{2s_n}{s_n}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{2\pi(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)} \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{E(p_n,q_n,r_n)}{\binom{2s_n}{s_n}} = 0.$$

Ezekből az egyenlőségekből és 1-ből kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U(2p_n,2q_n,2r_n)}{\binom{2s_n}{s_n}} = u(\alpha,\beta,\gamma),$$

ahol $u(\alpha,\beta,\gamma)$-t a következőképpen definiáljuk:

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\arctan\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma(\alpha+\beta)}}}{\sqrt{\alpha+\beta}} + \frac{\arctan\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{\sqrt{\beta(\alpha+\gamma)}}}{\sqrt{\alpha+\gamma}} + \frac{\arctan\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{\sqrt{\alpha(\beta+\gamma)}}}{\sqrt{\beta+\gamma}} - \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\right).$$

Terjesszük ki u-t arra az esetre is, ha $\alpha\beta\gamma = 0$, ekkor legyen $u(\alpha,\beta,\gamma) = 1$. Ekkor adódik a következő tétel:

3.1. tétel. *Legyen a_n, b_n, c_n pozitív egészek sorozatai,*

$$m_n = a_n + b_n + c_n, \ \lim_{n\to\infty} m_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{m_n} = \alpha, \ \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{m_n} = \beta, \ \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{m_n} = \gamma.$$

Ekkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g(a_n, b_n, c_n)}{\binom{m_n}{\lfloor \frac{m_n}{2} \rfloor}} \le u(\alpha, \beta, \gamma).$$

Bizonyítás. Ha $\alpha, \beta, \gamma > 0$, akkor fenti számolás mutatja, hogy az állítás igaz, ha az a_n, b_n, c_n számok párosak, de a páratlan számok is könnyen kiküszöbölhetőek a következő lemma segítségével.

3.2. lemma (Griggs, Odlyzko, Shearer [6])**.** $g(n_1, n_2, n_3) \le 2g(n_1 - 1, n_2, n_3)$.

Az $\alpha\beta\gamma = 0$ eset szintén könnyen kezelhető ezen lemma és a kétrészes Sperner-tétel segítségével. ■

A 2.8. lemmából következik, hogy u maximumát $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$-ban éri el. Amiből következik, hogy

3.3. tétel. $d_3 \le u\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, *vagyis* $d_3 \le 1,072\ldots$.

4. Homogén családok és a hozzájuk tartozó egészértékű program

Az egyszerűség kedvéért ebben a fejezetben 3 részes Sperner-családokra mondjuk ki az állításokat, de könnyen általánosíthatóak k-részes esetre is.

4.1. definíció. Egy F halmaz *típusán,* az (r_1, r_2, r_3) hármast értjük, ahol $|X_i \cap F| = r_i$, $i = 1, 2, 3$.

4.2. definíció. Egy $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ családot *homogénnek* nevezünk, ha $F \in \mathcal{F}$ esetén az összes F-fel megegyező típusú halmaz eleme $\mathcal{F}$-nek.

Egy $\mathcal{F}$ homogén család egy Sperner-család akkor és csak akkor, ha nincs két halmaz $\mathcal{F}$-ben (r_1, r_2, r_3) és (s_1, s_2, s_3) különböző típusokkal úgy, hogy létezik $i \ne j \in \{1, 2, 3\}$, amire $r_i = s_i$ és $r_j = s_j$.

4.3. lemma (Griggs, Odlyzko, Shearer [6] and Erdős, Katona [3])**.** *Ha $\mathcal{F}_0$ egy maximális méretű 3 részes Sperner, akkor létezik egy homogén Sperner-család $\mathcal{F}$, aminek ugyanakkora a mérete.*

Vagyis elegendő a maximumot a homogén családok között keresni. Vegyük észre, hogy ez ekvivalens a következő egészértékű program megoldásával (Griggs, Odlyzko, Shearer [6]): $x(i,j,k)$-k bináris változók ($0 \le i \le n_1, 0 \le j \le n_2, 0 \le k \le n_3$), $x(i,j,k) = 1$, ha az (i,j,k) típusú halmazok benne vannak $\mathcal{F}$-ben, 0 különben.

$$\sum_{i=0}^{n_1} x(i,j,k) \le 1 \qquad \forall\, 0 \le j \le n_2,\ 0 \le k \le n_3,$$

$$\sum_{j=0}^{n_2} x(i,j,k) \le 1 \qquad \forall\, 0 \le i \le n_1,\ 0 \le k \le n_3,$$

$$\sum_{k=0}^{n_3} x(i,j,k) \le 1 \qquad \forall\, 0 \le i \le n_1,\ 0 \le j \le n_3.$$

Keressük $\max \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j}\binom{n_3}{k} x(i,j,k)$-t.

4.4. sejtés (Aydinian, Czabarka, Erdős, Székely [1, Conjecture 7.1])**.** *Minden $k \ge 1$-re és $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 2^\ell - 1$-re, egy $\mathcal{F}$ homogén k-részes Sperner-család maximális akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0^{(k)}$, ahol egy $\mathcal{F}$ család eleme $\mathfrak{F}_0^{(k)}$-nak akkor és csak akkor, ha megkapható a következő módon. Vegyük egy π permutációját $\{0, 1, \ldots, 2^\ell - 1\}$-nek úgy, hogy a $\binom{2^\ell - 1}{\pi(i)}$ sorozat monoton csökkenő legyen. Ekkor az $\mathcal{F}$ család, ami azokból a halmazokból áll, melyek típusa az $\big\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid \pi^{-1}(x_1) \oplus \pi^{-1}(x_2) \oplus \ldots \oplus \pi^{-1}(x_k) = 0\big\}$ halmazból kerül ki, egy k-részes Sperner-család. (Itt $\oplus$ a koordinátánkénti kizáró vagy, másképpen a nim összeg.)*

A $k = 3$ és $n_1 = n_2 = n_3 = 15$ esetben megoldva a fenti egészértékű programot kapjuk, hogy a sejtés nem igaz, mert található egy család, ami nagyobb méretű, mint az $\mathfrak{F}_0^{(k)}$-beliek. (l. [11] a részletekért). (A sejtés szerzői ellenőrizték az állítást a $k = 3$, $\ell = 1, 2, 3$ esetben egyszerűen végigmenve az összes homogén családon, de az az $\ell = 4$ esetben túl lassú, viszont az egészértékű program perceken belül megoldható.)

Az egyik oka, hogy ez az egészértékű program gyorsan megoldható az, hogy az egészérékű optimum megegyezik az LP relaxált optimumával. Ez igaz minden esetben, amit kipróbáltunk. Leellenőriztük az $n_1, n_2, n_3 \le 15$ eseteket, és ezekben egyenlőek voltak, de úgy gondoljuk, kell lennie ellenpéldának nagyobb n_i-kre.

A 2.3. lemma a következőképpen is megfogalmazható:

$$\begin{aligned} &\max\big\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ egy 3 részes Sperner-család}\big\} \\ &\quad \le \min\big\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ egy monokromatikus láncfelbontás}\big\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Természetes kérdés, hogy az egyenlőtlenség helyettesíthető-e egyenlőséggel. Megmutatjuk, hogy ha az lp és az egészértékű optimum nem esik egybe, szigorú egyenlőtlenség teljesül.

Tekintsük a fenti egészértékű program lp-relaxációját, ennek optimuma legalább akkora, mint az egészértékű program optimuma. De az lp optimum egyenlő a következő duális optimumával (Dualitás tétel):

$$y(*,j,k) + y(i,*,k) + y(i,j,*) \ge \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j}\binom{n_3}{k} x(i,j,k)$$

$$\forall\, 0 \le i \le n_1, \quad 0 \le j \le n_2, \quad 0 \le k \le n_3,$$

$$y(*,j,k) \ge 0, \quad y(i,*,k) \ge 0, \quad y(i,j,*) \ge 0,$$

$$\forall\, 0 \le i \le n_1, \quad 0 \le i \le n_2, \quad 0 \le k \le n_3$$

$$\min \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} y(*, j, k) + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{n_3} y(i, *, k) + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} y(i, j, *).$$

Vagyis, ha van a duálisnak egy megengedett megoldása, akkor ennek célfüggvényértéke egy felső becslést jelent a 3 részes Sperner-családok méretére. Most mutatunk egy módszert hogyan kapható meg a duálisnak egy megengedett megoldása egy a monokromatikus láncfelbontásból.

4.5. lemma. *Ha $\mathcal{C}$ egy monokromatikus láncfelbontás, akkor létezik a duálisnak egy megengedett megoldása, amire a célfüggvényérték éppen $|\mathcal{C}|$.*

Bizonyítás. A $C = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$ monokromatikus lánc típusa $(*, j, k)$, ha színe 1, $|F_1 \cap X_2| = j$ és $|F_1 \cap X_3| = k$. (Vegyük észre, hogy $F_h \cap X_2$ mind egyenlő $h = 1, 2, \ldots, m$-re.) A $C = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$ monokromatikus lánc típusa $(i, *, k)$, ha színe 2, $|F_1 \cap X_1| = i$ és $|F_1 \cap X_3| = k$. A $C = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$ monokromatikus lánc típusa $(i, j, *)$, ha színe 3, $|F_1 \cap X_1| = i$ és $|F_1 \cap X_2| = j$. (Ha $C = (F_1)$, akkor a típusa $\big(*, |F_1 \cap X_2|, |F_1 \cap X_3|\big)$).

Legyen $y(*, j, k)$, $y(i, *, k)$, illetve $y(i, j, *)$ azon láncok száma $\mathcal{C}$-ben melyek típusa rendre $(*, j, k)$, $(i, *, k)$, illetve $(i, j, *)$. Tekintsünk egy F-et, aminek típusa (i, j, k). Ezt az F-et tartalmaznia kell egy láncnak $\mathcal{C}$-ben, de F-et csak olyan láncok tartalmazhatják, amiknek típusa $(*, j, k)$, $(i, *, k)$ vagy $(i, j, *)$. Összesen $\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j}\binom{n_3}{k}$ halmaz létezik, aminek típusa (i, j, k), vagyis $y(*, j, k) + y(i, *, k) + y(i, j, *) \ge \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j}\binom{n_3}{k}$. ■

4.6. megjegyzés. Ebből következik, hogy ha az lp és az egészértékű optimum nem egyenlő, akkor szigorú egyenlőtlenség áll (2)-ben. Vagyis nem kapható meg a pontos korlát monokromatikus láncfelbontásokkal.

5. Alsó becslések

A módszerünk ebben a fejezetben Füredi [5] és Griggs, Odlyzko, Shearer [6] módszerének egy finomítása lesz. Ebben a fejezetben feltesszük, hogy $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, $|X_i| = n$ $(i = 1, 2, 3)$.

5.1. definíció. A következő alakú halmazokat, t oldalú *kockának* nevezzük:

$$R_n(a_1, a_2, a_3, t) = \big\{F \in \mathcal{P}(X) \mid a_i \le |X_i \cap F| < a_i + t,\ (i = 1, 2, 3)\big\}.$$

5.2. definíció. Az $R_n(a_1, a_2, a_3, t)$ és $R_n(b_1, b_2, b_3, u)$ kockák *kompatibilisek,* ha létezik $i \ne j \in \{1, 2, 3\}$ úgy, hogy $[a_i, a_i + t) \cap [b_i, b_i + u) = \emptyset$ és $[a_j, a_j + t) \cap [b_j, b_j + u) = \emptyset$.

A következő lemma azonnal adódik.

5.3. lemma. *Ha $R_n\big(a_1(i), a_2(i), a_3(i), t(i)\big)$, $i = 1, 2, \dots, N$ páronként kompatibilis kockák és $\mathcal{F}_i \subset R_n\big(a_1(i), a_2(i), a_3(i), t(i)\big)$ 3 részes Sperner-családok akkor $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^N \mathcal{F}_i$ is egy 3 részes Sperner-család.* ■

Mutatunk egy általános módszert nagy Sperner-családok keresésére. Tekintsünk néhány $\mathcal{F}_i \subset R_n\big(a_1(i), a_2(i), a_3(i), t(i)\big)$, $(i = 1, 2, \dots, N)$ Sperner-családot és konstruáljunk egy G gráfot, melynek csúcshalmaza $\{1, 2, \dots, N\}$. Egy (i, j) csúcspár akkor lesz G-nek éle, ha $R_n\big(a_1(i), a_2(i), a_3(i), t(i)\big)$ és $R_n\big(a_1(j), a_2(j), a_3(j), t(j)\big)$ nem kompatibilisek. Az i csúcs súlya legyen $|\mathcal{F}_i|$. Legyen H egy független halmaz G-ben. Ekkor létezik egy Sperner-család, melynek mérete H összsúlyával egyenlő. (Konkrétan $\cup_{i\in H}\mathcal{F}_i$ egy Sperner-család, melynek mérete $\cup_{i\in H}|\mathcal{F}_i|$.) Vagyis a célunk egy minél nagyobb súlyú független halmaz megtalálása ebben a gráfban.

A G csúcsainak megfelelő kockákat a következő módon fogjuk választani. Felosztunk egy nagy kockát $(2k)^3$ kisebb kockára, melyek oldalai egyenlőek. Legyen a nagy kocka $R_n\Big(\big\lfloor \frac{n}{2} \big\rfloor - kt, \big\lfloor \frac{n}{2} \big\rfloor - kt, \big\lfloor \frac{n}{2} \big\rfloor - kt, 2kt\Big)$. Ekkor a kis kockák

$$C_n^t(a,b,c) = R_n\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + at, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + bt, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + ct, t\right), \quad \text{ahol} \quad -k \le a,b,c \le k-1.$$

alakúak lesznek. A G-nek ezekhez tartozó csúcsaira az (a, b, c) hármasokkal fogunk hivatkozni. Két különböző $C_n^t(a_1, b_1, c_1)$ és $C_n^t(a_2, b_2, c_2)$ kocka nem kompatibilis, ha legalább két egyenlőség teljesül a következők közül: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$. G csúcsainak egy H részhalmazához G tartozó karakterisztikus vektor az $\big(x(a,b,c)\big)_{-k\le a,b,c\le k-1}$ vektor, ahol $x(a, b, c) = 1$, ha $(a, b, c) \in H$, és 0 különben.

Könnyen látszik, hogy a következő egészértékű program bináris megoldásai éppen a H független halmazok karakterisztikus vektorai.

$$\sum_{a=-k}^{k-1} x(a,b,c) \le 1 \quad (\forall -k \le b,c \le k-1),$$

$$\sum_{b=-k}^{k-1} x(a,b,c) \le 1 \quad (\forall -k \le a,c \le k-1),$$

$$\sum_{c=-k}^{k-1} x(a,b,c) \le 1 \quad (\forall -k \le a,b \le k-1),$$

$$x(a,b,c) \ge 0 \quad (\forall -k \le a,b,c \le k-1).$$

Ezt az egészértékű programot I_k-val jelöljük.

5.4. lemma. *Legyen $\mathcal{F}_n(a, b, c) \subset C_n^t(a, b, c)$ (3 részes) Sperner-család. Legyen az (a, b, c) csúcs súlya $w_n^t(a, b, c) = \big|\mathcal{F}_n(a, b, c)\big|$. Ekkor a maximális súlyú független halmaz karakterisztikus vektora meghatározható, mint az I_k egészértékű program megoldása a*

$$\max \sum_{a=-k}^{k-1} \sum_{b=-k}^{k-1} \sum_{c=-k}^{k-1} w_n^t(a,b,c) \cdot x(a,b,c)$$

célfüggvény mellett. Ha az optimális megoldás értéke M, akkor létezik M méretű Sperner-család. ■

De milyen nagy lehet $w_n^t(a,b,c)$? A következő lemma ad egy jó korlátot.

5.5. lemma. *Egy adott $R_n(a_1,a_2,a_3,t)$ kockára létezik egy $\mathcal{F}$ 3 részes Sperner-család, amire $\mathcal{F} \subset R_n(a_1,a_2,a_3,t)$ és $|\mathcal{F}| \geq \frac{1}{t}\big|R_n(a_1,a_2,a_3,t)\big|$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{F}_i = \{F \in R_n(a_1,a_2,a_3,t) \mid |F| \equiv i \pmod t\}$, $i = 1,2,\dots,t$. Látszik, hogy $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ páronként diszjunktak, uniójuk $R_n(a_1,a_2,a_3,t)$, és mind 3 részes Sperner-családok. A legnagyobb közülük jó lesz. ■

Vagyis az 5.4. lemmában $w_n^t(a,b,c)$-t választhatjuk $\frac{|C_n^t(a,b,c)|}{t}$-nek.

Fixáljuk k-t. Egy adott n-re és t más-más választására kaphatunk egy nagy méretű Sperner-családot a 5.4. lemmát alkalmazva $w_n^t(a,b,c) = \frac{|C_n^t(a,b,c)|}{t}$ mellett. De mi d_3-ra szeretnénk korlátot, vagyis egyfajta határértékét kellene találnunk ezeknek az egészértékű programoknak. A célunk úgy megválasztani a $t = t(n)$ paramétert, hogy a következő határérték létezzen:

$$w(a,b,c) = \lim_{n\to\infty} \frac{w_n^{t(n)}(a,b,c)}{\binom{3n}{\lfloor 1{,}5n\rfloor}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\big|C_n^{t(n)}(a,b,c)\big|}{t(n)\binom{3n}{\lfloor 1{,}5n\rfloor}}.$$

5.6. lemma. *Tekintsük az optimális megoldását I_k-nak a*

$$\max \sum_{a=-k}^{k-1} \sum_{b=-k}^{k-1} \sum_{c=-k}^{k-1} w(a,b,c) \cdot x(a,b,c)$$

célfüggvény mellett. Ez ad nekünk egy H független halmazt W súllyal. Ekkor W alsó korlát d_3-ra.

Bizonyítás. Minden n-re kaphatunk egy Sperner-családot, aminek mérete

$$\sum_{(a,b,c)\in H} w_n^{t(n)}(a,b,c) = \sum_{(a,b,c)\in H} \big(1+o(1)\big) w(a,b,c) \binom{3n}{\lfloor 1{,}5n\rfloor}$$
$$= \big(1+o(1)\big)\binom{3n}{\lfloor 1{,}5n\rfloor} \sum_{(a,b,c)\in H} w(a,b,c) = \big(1+o(1)\big)\binom{3n}{\lfloor 1{,}5n\rfloor} W,$$

de ebből W egy alsó korlát d_3-ra. ■

5.7. lemma. *A fenti $w(a_1,a_2,a_3)$ határérték létezik, ha $t(n)$-t $\big\lfloor \frac{s}{2}\sqrt{n}\big\rfloor$-nek választjuk, ahol $s \in \mathbb{R}^+$ konstans, és ekkor $w(a_1,a_2,a_3) = \frac{2\sqrt{1{,}5\pi}}{s} \prod_{i=1}^{3} \Big(\Phi\big((a_i+1)s\big) - \Phi(a_i s)\Big)$. (Ahol $\Phi(t)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye, azaz $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.)*

Bizonyítás. A következő határértéket keressük:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\lfloor \frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor}\left|R_n\left(\lfloor \frac{n}{2}\rfloor + a_1\lfloor \frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor, \lfloor \frac{n}{2}\rfloor + a_2\lfloor \frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor, \lfloor \frac{n}{2}\rfloor + a_3\lfloor \frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor, \lfloor \frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor\right)\right|}{\binom{3n}{\lfloor 1{,}5n\rfloor}}.$$

A de Moivre–Laplace-tételből

$$\sum_{j=\lfloor \frac{n}{2}\rfloor + a_i\lfloor \frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor + a_i\lfloor \frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor + \lfloor \frac{s}{2}\sqrt{n}\rfloor - 1} \binom{n}{j} = \big(1+o(1)\big)\Big(\Phi\big((a_i+1)s\big) - \Phi(a_i s)\Big)2^n.$$

Ez és az ismert tény $\lim_{m\to\infty}\left(\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor}\Big/\frac{2^m}{\sqrt{\pi m}}\right) = 1$ bizonyítja az állítást. ■

A 5.6. lemmából következik:

5.8. lemma. *Minden $s \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{Z}^+$-re, az I_k egészértékű program optimuma a*

$$\max \sum_{a=-k}^{k-1}\sum_{b=-k}^{k-1}\sum_{c=-k}^{k-1} w(a,b,c)\cdot x(a,b,c)$$

célfüggvény mellett felső korlát d_3-ra. ■

5.9. lemma. *A fenti egészértékű program optimuma legalább* 4*-szerese a következő egészértékű program optimumának:*

$$\sum_{a=0}^{k-1} z(a,b,c) \le 1 \quad (\forall\, 0 \le b,c \le k-1),$$

$$\sum_{b=0}^{k-1} z(a,b,c) \le 1 \quad (\forall\, 0 \le a,c \le k-1),$$

$$\sum_{c=0}^{k-1} z(a,b,c) \le 1 \quad (\forall\, 0 \le a,b \le k-1),$$

$$\max \sum_{a=0}^{k-1}\sum_{b=0}^{k-1}\sum_{c=0}^{k-1} w(a,b,c)\cdot z(a,b,c),$$

ahol $z(a,b,c)$-k bináris változók $(0 \le a,b,c \le k-1)$.

Bizonyítás. Legyen $|x|^* = x$, ha x nemnegatív, és $|x|^* = -x-1$, ha x negatív.

Ha van egy z megengedett megoldásunk erre, definiálhatunk belőle egy x megengedett megoldását I_k-nak a következő módon: $x(a,b,c) = 1$ akkor és csak akkor, ha 0 vagy 2 negatív szám szerepel az a,b,c számok között, és $z\big(|a|^*, |b|^*, |c|^*\big) = 1$. Könnyű látni, hogy ez valóban megengedett megoldás, az állítás pedig abból a tényből következik, hogy $w(a,b,c) = w\big(|a|^*, |b|^*, |c|^*\big)$. ■

Számítógéppel megoldva a 5.9. lemmabeli egészértékű programot az $s = 0{,}1$ és $k = 32$ paraméter mellett kapunk egy 0,262725 értékű megengedett megoldást. Vagyis azt kaptuk, hogy $d_3 > 1{,}0509$ [11].

Köszönetnyilvánítás. Szeretném megköszönni témavezetőm, Katona Gyula segítségét.

Irodalom

[1] H. Aydinian, É. Czabarka, P. L. Erdős, L. A. Székely, A tour of M-part L-Sperner families, *J. Comb. Theory (A),* **118** (2011), 702–725.

[2] N. G. de Bruijn, C. A. van E. Tengbergen, D. Kruyswij, On the set of divisors of a number, *Nieuw Arch. Wisk. (2),* **23** (1949–51), 191–193.

[3] P. L. Erdős, G. O. H. Katona, Convex hulls of more-part Sperner families, *Graphs and Combinatorics,* **2** (1986), 123–134.

[4] Z. Furedi, J. R. Griggs, A. M. Odlyzko, J. B. Shearer, Ramsey–Sperner theory, *Discrete Mathematics,* **63** (1987), 143–152.

[5] Z. Füredi, A Ramsey–Sperner theorem, *Graphs and Combinatorics,* **1** (1985), 51–56.

[6] J. R. Griggs, A. M. Odlyzko, J. B. Shearer, k-Color Sperner theorems, *J. Comb. Theory (A),* **42** (1986), 31–54.

[7] G. Katona, On a conjecture of Erdős and a stronger form of Sperner's theorem, *Studia Sci. Math. Hungar.,* **1** (1966), 059–063.

[8] G. Katona, A three part Sperner theorem, *Studia Sci. Math. Hungar.,* **8** (1973), 379–390.

[9] D. J. Kleitman, On a lemma of Littlewood and Offord on the distribution of certain sums, *Math. Z.,* **90** (1965), 251–259.

[10] E. Sperner, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Zeitschrift,* **27** (1928), 544–548.

[11] `www.cs.elte.hu/ mesza/morepart.html` (A számítógépes számítások részletei.)

Mészáros András

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
1053 Budapest, Reáltanoda utca 13–15.

`meszaandras@gmail.com`

A LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓ BÉZOUT-FÉLE EGYÜTTHATÓIRÓL

HAMBURGER PÉTER, PETRUSKA GYÖRGY

1. Bevezetés

(i) Ahogy szokásos, két adott egész szám a és b (nem mindkettő 0) legnagyobb közös osztóján azt a d számot értjük, ami osztója a-nak és b-nek is, és az ilyen számok között a legnagyobb; jelölése (a, b), ([5, 2]). Ha $(a, b) = 1$, akkor azt mondjuk, hogy a és b relatív prímek. Mivel az oszthatóság független a számok előjelétől, a legnagyobb közös osztó mindig pozitív, és $(a, b) = \big(|a|, |b|\big)$. Ezért feltehetjük, hogy $1 \leq a \leq b$.
Jól ismert a legnagyobb közös osztó további két, a fentivel ekvivalens definíciója:

(ii) A legnagyobb közös osztó az a pozitív szám, amely
  (a) közös osztó,
  (b) bármely közös osztónak többszöröse.

(iii) a és b legnagyobb közös osztója az a szám, amely az x és y egész együtthatókkal képzett összes $xa + yb$ alakú számok halmazában a legkisebb pozitív elem, ([1]).

Az (i) alatti definíció a legegyszerűbb, könnyen átlátható, és (a, b) létezése nem szorul magyarázatra. Ám (ii) és különösen (iii) esetében további gondolatokra van szükség. Tankönyvek, monográfiák Bézout-lemma, Bézout-tétel, Bézout-azonosság néven hivatkoznak az $xa + yb = (a, b)$ előállításra, ahol az x és y a Bézout-féle együtthatók.

A definíciók megismerése után természetesen következik két kérdés; egyrészt hogyan lehet kiszámítani (a, b) értékét, másrészt azt a két (Bézout-féle) együtthatót, amelyekkel $xa + yb$ éppen a legnagyobb közös osztót adja meg.

2. Az euklidészi algoritmus és baráti köre

Euklidészi algoritmus

(i) Az euklidészi algoritmus az euklidészi osztás formulájával kezdődik, adott $1 \leq a \leq b$ esetén $b = ha + r$, ahol h a hányados és r a maradék, $0 \leq r < a$. A folytatás azon az egyszerű észrevételen alapul, hogy b és a közös osztói ugyanazok a számok, mint a és r közös osztói, ebből pedig $(a, b) = (a, r)$. De az (a, r) számpár kisebb, mint (a, b) (azaz $r < a$ és $a \leq b$), és ha az eljárást ismételjük, egyre kisebb és kisebb maradékot kapunk, amelyek mindegyike többszöröse a keresett legnagyobb közös osztónak. Az algoritmus megáll, amikor a maradék zérus, és az utolsó nem zérus maradék pedig egyenlő (a, b)-vel.

Kiterjesztett euklidészi algoritmus

(ii) A fenti gondolatmenet könnyen precíz bizonyítássá erősíthető (például teljes indukcióval), de nem nyilvánvaló, hogy hol van benne elbújtatva a Bézout-azonosság. A kulcsot megint az euklidészi osztás formulájában találjuk meg. Ha a képletet $b - ha = r$ alakba írjuk, ráismerünk az r maradék $xa + yb$ alakú előállítására az $x = -h$ és $y = 1$ választással. Az algoritmus további lépéseiben ez nem látszik közvetlenül, de mindegyik maradék $xa + yb$ alakra hozható. Ez az úgynevezett kiterjesztett euklidészi algoritmus, amelyben szükség van az euklidészi algoritmus során talált összes hányadosra és maradékra, ezért ezeket tárolni kell ([5]). Bézout tételét általában a tankönyvek sokkal később bizonyítják, mint ahogy kimondják, lásd például a [6] könyv 269. és 344. oldalát.

Lánctört algoritmus

(iii) A lánctört algoritmus számára ritkán jut hely a tananyagban, ezért az euklidészi algoritmussal való kapcsolata kevéssé ismert. A lánctört kifejtés célja elsősorban egy x irracionális szám racionális számokkal való legjobb közelítéseinek a megtalálása, és ez nem úgy hangzik mintha köze lenne a legnagyobb közös osztóhoz, vagy Bézout tételéhez.
A $[0, 1]$ intervallumon vezessük be a következő függvényt, a lánctört algoritmus operátorát:

$$Tx = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor, & 0 < x \leq 1. \end{cases} \tag{1}$$

Itt a szokásos módon $\lfloor x \rfloor$ jelöli az x valós szám egész részét.
Tx a $[0, 1]$ intervallumot önmagára képezi le, ezért T tetszőleges sokszor komponálható önmagával, a $T^2x = T(Tx)$, $T^3x = T\big(T(Tx)\big)$, $\ldots$ iterált operátorok értelmesek. A T függvényt a $Tx = T\big(x - \lfloor x \rfloor\big)$ definícióval periodikusan kiterjesztjük a számegyenesre.
A lánctört algoritmus a T függvény iterálását jelenti mindaddig, amíg a T függvény zérus értéket nem ad. Az iteráció minden lépésében feljegyezzük az $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ egész részeket, e számokat a lánctört kifejtés jegyeinek nevezzük.
Legyen

$$0 < x < 1, \quad a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad x_1 = Tx.$$

Tx definíciójából

$$x = \frac{1}{(a_1 + x_1)} \quad \text{vagy} \quad x = \frac{1}{(a_1 + Tx)}.$$

Ugyanez a képlet x_1-re felírva

$$x_1 = \frac{1}{(a_2 + x_2)}, \quad \text{ahol} \quad x_2 = Tx_1 = T^2 x, \quad \text{azaz}$$

$$x = \frac{1}{(a_1 + \frac{1}{(a_2+x_2)})}, \quad \text{vagy} \quad x = \frac{1}{(a_1 + \frac{1}{(a_2+T^2x)})},$$

$$\vdots$$

Könnyen látható, hogy irracionális x számból kiindulva a lánctört kifejtés végtelen, racionális x esetén az algoritmus véges sok lépésben véget ér, azaz valamilyen k indexre $T^k x = 0$, és ekkor a fenti tört x-szel egyenlő.

Euklidészi és lánctört algoritmus összehasonlítása

(iv) A két algoritmus összehasonlítására bevezetjük a modulus operátort, egyszerűen $M(a,b)$-vel jelöljük a

$$b = h \cdot a + r \qquad (1 \le a \le b)$$

euklidészi osztás maradékát: $M(a,b) = r$.
Az osztás formulájából $\frac{b}{a} = h + \frac{r}{a}$, azaz h a $\frac{b}{a}$ egész része, ezért

$$T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{r}{a} \quad \text{és} \quad M(a,b) = a\left(\frac{b}{a} - \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor\right) = aT\left(\frac{a}{b}\right) = r.$$

A két algoritmus között egy lényeges különbség van: az euklidészi algoritmus számára az osztás során fellépő h hányadosok érdektelenek, az algoritmus célja az r maradékok csökkenő sorozatának előállítása:

$$\begin{aligned} M(a,b) &= r_1, \\ M(r_1,a) &= r_2, \\ M(r_2,r_1) &= r_3, \\ M(r_3,r_2) &= r_4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

mert ennek a végén a legnagyobb közös osztót találjuk. A lánctört algoritmus viszont éppen a hányadosok (azaz az egész részek) sorozatát keresi, mert ezek a számok a lánctört kifejtés jegyei:

$$a_1 = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor = \frac{b}{a} - T\left(\frac{a}{b}\right),$$

$$a_2 = \left\lfloor \frac{1}{T\left(\frac{a}{b}\right)} \right\rfloor = \frac{1}{T\left(\frac{a}{b}\right)} - T^2\left(\frac{a}{b}\right),$$

$$a_3 = \left\lfloor \frac{1}{T^2\left(\frac{a}{b}\right)} \right\rfloor = \frac{1}{T^2\left(\frac{a}{b}\right)} - T^3\left(\frac{a}{b}\right),$$

$$a_4 = \left\lfloor \frac{1}{T^3\left(\frac{a}{b}\right)} \right\rfloor = \frac{1}{T^3\left(\frac{a}{b}\right)} - T^4\left(\frac{a}{b}\right),$$

$$\vdots$$

A fenti formulák alapján mondhatjuk, hogy a két algoritmus ugyanaz, mert a végrehajtott lépések egymással kifejezhetők, de azt is, hogy különbözők, mert az algoritmusban előállított két sorozat egymás duális kiegészítője. A fenti összehasonlítás és analógia persze csak racionális számok esetében értelmes, irracionális számokra alkalmazva a lánctört algoritmus egyedül marad. Tegyük hozzá, itt kezdődik a lánctörtek érdemi elmélete.
Újra hangsúlyozzuk, hogy a lánctört kifejtést az $\frac{a}{b}$ racionális szám számlálója és nevezője külön-külön nem érdekli, egy $\frac{ka}{kb}$ bővítésből kiindulva a kifejtés ugyanaz marad.

Lánctört algoritmus és Bézout-együtthatók

(v) A lánctört algoritmusban generált

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_1},$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{\left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right)},$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{1}{\left(a_1 + \dfrac{1}{\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right)}\right)},$$

$$\vdots$$

törteket *közelítőnek,* vagy *konvergenseknek* nevezzük. Az emeletes törtek lebontása és közelebbi vizsgálata kellemetlen feladatnak látszik, de mind a p_k számlálók, mind pedig a q_k nevezők igen egyszerű rekurzióval állíthatók elő, amit itt nem részletezünk.
Lényeges viszont a következő nevezetes és könnyen bizonyítható tulajdonság: bármely két szomszédos konvergensre teljesül

$$p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_k = \pm 1.$$

Ebből azonnal látható, hogy bármely konvergens számlálója és nevezője relatív prím számpár, és alkalmas előjellel a szomszédos párok egymás Bézout-együtthatói! Speciálisan, racionális x-ből indítva az algoritmust, az utolsó konvergens maga x, mondjuk $x = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, az előző q_k és $-p_k$ pedig a keresett Bézout-együtthatók. A lánctört kifejtés tehát megtalálja $\frac{a}{b}$ Bézout-együtthatóit, ha $\frac{a}{b}$

redukált tört. De a Bézout-együtthatók függetlenek attól, hogy a tört redukált vagy bővített, mert a (redukált) Bézout-azonosságot végigszorozhatjuk a legnagyobb közös osztóval. A legnagyobb közös osztót rögtön megkaphatjuk, ha az utolsó konvergens számlálójával elosztjuk az eredeti (esetleg bővített) tört számlálóját.

(vi) Az előzők illusztrálására tekintsük az $x = \frac{155}{403}$ tört kifejezést.

$$Tx = \frac{403}{155} - \left\lfloor \frac{403}{155} \right\rfloor = \frac{93}{155}, \quad \text{itt} \quad a_1 = \left\lfloor \frac{403}{155} \right\rfloor = 2 \quad \text{és} \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2},$$

$$T^2x = \frac{155}{93} - \left\lfloor \frac{155}{93} \right\rfloor = \frac{62}{93}, \quad \text{itt} \quad a_2 = \left\lfloor \frac{155}{93} \right\rfloor = 1 \quad \text{és} \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{1}\right)},$$

$$T^3x = \frac{93}{62} - \left\lfloor \frac{93}{62} \right\rfloor = \frac{31}{62}, \quad \text{itt} \quad a_3 = \left\lfloor \frac{93}{62} \right\rfloor = 1 \quad \text{és} \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{(1+1)}\right)},$$

$$T^4x = \frac{62}{31} - \left\lfloor \frac{62}{31} \right\rfloor = 0, \quad \text{itt} \quad a_4 = \left\lfloor \frac{62}{31} \right\rfloor = 2 \quad \text{és} \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{2})}\right)}\right)},$$

és $T^4x = 0$ miatt az algoritmus itt megáll.
Az utolsó konvergens

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{2})}\right)}\right)} = \frac{5}{13}, \quad \text{tehát} \quad x = \frac{p_4}{q_4} = \frac{5}{13}.$$

A legnagyobb közös osztó $(403, 155) = \frac{155}{5} = 31$.
Az utolsó előtti konvergens $\frac{p_3}{q_3} = \frac{1}{(2+\frac{1}{(1+1)})} = \frac{2}{5}$, és $2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 1$, azaz a Bézout-együtthatók 2 és -5, úgyszintén $2 \cdot 403 - 5 \cdot 155 = 31$.

3. Bézout tételének egy alternatív bizonyítása

(i) E szakasz célja egy további algoritmus elemzése. Az algoritmus egy egyszerű kereső algoritmus, amely talán a legtájékozatlanabb diákok számára is kényelmes utat kínál a Bézout-együtthatók konkrét megadásához, a Bézout-tétel megértéséhez és igazolásához. A szakirodalomban, tankönyvekben található bizonyítások között leggyakoribb a modulus fogalmára, azaz az $xa + yb$ alakú számok halmazára támaszkodó egzisztencia bizonyítás, amelyből az x és y konkrét értékére nehéz következtetni. A kiterjesztett euklidészi algoritmus és a lánctört algoritmus, mint fentebb láttuk, konkrétan kiszámítja az együtthatókat, de a kezdő diákok körében nem növeli a téma népszerűségét.

(ii) Legyen $1 \leq a \leq b$, és induljunk ki megint az osztás formulájából: $b = h_1 a + r_1$, $0 \leq r_1 < a$, amit Bézout-módra így is írhatunk: $1 \cdot b - h_1 a = r_1$. Nem remélhetjük, hogy r_1 rögtön a legnagyobb közös osztó, és hogy az 1, $-h_1$ választásával megtaláltuk a keresett Bézout-együtthatókat, de kísérletezzünk más együtthatókkal is.
Alkalmazzuk a formulát $b, 2b, 3b, \ldots, (a-1)b$ számok mindegyikére. Keressük meg azt a k számot, amelyre a $kb = h_k a + r_k$ képletben r_k a lehető legkisebb **pozitív** maradék. A már bevezetett $M(a, b)$ modulus operátorral kifejezve az $R = \big\{M(a, kb) > 0 : 1 \leq k \leq a-1\big\}$ halmaz minimumát keressük.
A kereső algoritmus számítógépes futtatásához egy ötsoros programra van szükség, amely tárolja az eddig talált legkisebb $r_{\min} > 0$ maradékot, valamint a $k_{\min}$ indexet, amelyhez $r_{\min}$ tartozik, és a hozzátartozó $h_{\min}$ hányadost. A kereső algoritmus végignézi a k indexekhez tartozó maradékokat, és ha egy aktuális k indexnél $0 < r_k < r_{\min}$, akkor mindhárom tárolóban kicseréljük a számokat a megfelelő új értékre. Az euklidészi iterációval és a lánctört algoritmussal összevetve a kereső algoritmus annyiban valóban egyszerűbb, hogy az osztó nem változik, mindig a marad, az osztandók pedig egy számtani sorozat elemei, ami szintén barátságos halmaz.
Természetesen be kell még látni, hogy a keresés eredményeképp kapott formula $k_{\min} \cdot b - h_{\min} \cdot a = r_{\min}$ valóban Bézout-azonosság, azaz hogy $(a, b) = r_{\min}$. Mondjuk ezt ki tétel formájában:

1. tétel. *A kereső algoritmussal kapott fenti $k_{\min} \cdot b - h_{\min} \cdot a = r_{\min}$ képletben $r_{\min} = (a, b)$. Speciálisan, $k_{\min}$ és $-h_{\min}$ a Bézout-együtthatók.*

Bizonyítás.

a) Vegyük szemügyre az R halmazt először abban a speciális esetben, amikor $(a, b) = 1$. Legyen $1 \leq j < k \leq a-1$ két különböző index. Ha a megfelelő maradékokra $r_k = r_j$ fennállna, akkor a

$$kb = h_k a + r_k,$$
$$jb = h_j a + r_j$$

egyenletekből kivonással $(k-j)b = (h_k - h_j)a$ adódik, ebből $(a, b) = 1$ miatt a osztója a $k-j$ számnak. Ez pedig $1 \leq k-j < a$ miatt lehetetlen. A jól ismert gondolatmenettel azt a jól ismert tényt kaptuk, hogy $(a, b) = 1$ esetében a $\{kb : 1 \leq k \leq a-1\}$ számtani sorozat pontosan az a szám nemzérus maradékosztályait futja be. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy az M operátor a $\{k : 1 \leq k \leq a-1\}$ halmazt kölcsönösen egyértelműen képezi le az R halmazra, azaz önmagára. R legkisebb eleme tehát 1, és ezzel a Bézout-tételt az $(a, b) = 1$ speciális esetében beláttuk.

b) Tekintsük most az általános esetet, legyen röviden $d = (a, b)$, $p = \frac{a}{d}$, $q = \frac{b}{d}$. Jelölje R' a p és q számokhoz tartozó R halmazt, azaz $R' = \big\{M(p, kq) : 1 \leq k \leq p-1\big\}$. Mivel $(p, q) = 1$, az előző a) pont szerint $R' = \{k : 1 \leq k \leq p-1\}$ és R' legkisebb eleme 1.

Definíció szerint

$$(*) \qquad M(a,kb) = a\left(\frac{kb}{a} - \left\lfloor \frac{kb}{a} \right\rfloor\right) = dp\left(\frac{kq}{p} - \left\lfloor \frac{kq}{p} \right\rfloor\right) = dM(p,kq),$$

és ebből látható, hogy a $d, 2d, 3d, \ldots, (p-1)d$ számok mind elemei R-nek, és köztük d a legkisebb. R definiciója megköveteli, hogy a k index ne álljon meg $(p-1)$-nél, be kell futnia a teljes $1 \leq k \leq (a-1)$ tartományt. De az R' halmazt kimerítettük $(p-1)$-nél, ezért a fenti $(*)$ képlet alapján R-ben is csak a $d, 2d, 3d, \ldots, (p-1)d$ számok ismétlődhetnek (összesen d-szer fordul elő mindegyik). Igazoltuk tehát, hogy a kereső algoritmus által talált $r_{\min}$ legkisebb pozitív maradék valóban az (a, b) legnagyobb közös osztó, és ezzel a Bézout-tételt is beláttuk. ∎

4. Megjegyzések

(i) Az euklidészi algoritmus mintegy 2300 éves, de népszerűsége ma is töretlen [7]. Nemcsak hatékony, de lényegében a lehető legjobb. Részletes leírás található az algoritmusok történelmi kialakulásáról a 318. oldalon a [3] könyvben. Adott $a \leq b$ esetén legfeljebb $\log a$ lépésre van szüksége ahhoz, hogy a legnagyobb közös osztót meghatározza, ezért kézi számítások elvégzésére is alkalmas. A becslés annál jobb, minél nagyobb a logaritmus alapszáma. Könnyen látható, hogy az alap legalább $\sqrt{2}$-nek választható, valamivel nehezebb igazolni, hogy a legjobb választás $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, az aranymetszés aránya [3, 4]. Ennek oka az, hogy az algoritmus akkor a leglassúbb, ha két szomszédos Fibonacci-számra alkalmazzuk. Ugyanez áll a lánctört algoritmusra is, mert lépésszáma az euklidészi algoritmusával azonos.

(ii) A kereső algoritmus futási ideje reménytelenül hosszabb, definíciójából világos, hogy a szükséges lépések száma a, ezért csak kis számok esetében elfogadható. Itt jegyezzük meg, hogy az algoritmusok kutatói nem a bemenő adat nagyságához, hanem a bevitt adat tárolásához szükséges memória méretéhez viszonyítva mérik egy algoritmus hatékonyságát. Mivel a tárolásához $\log_2 a$ bitre van szükség, az euklidészi algoritmus lineáris hatékonyságú, a kereső algoritmusunk pedig exponenciális. A következő pontban tovább vizsgáljuk, hogyan lehet az algoritmus természetének megváltoztatása nélkül a hatékonyságát javítani, legalábbis bizonyos esetekben. A kereső algoritmust „barátkoztató" algoritmusnak szántuk, ha segítségével valaki megérti a Bézout-tételt, néhány példát számítógépen kipróbál, utána az euklidészi algoritmus és talán a lánctört kifejtés vonzóbb lesz, és ezekre se nehéz programot írni. Tekintve, hogy a kereső algoritmus implementálása triviális, számítógépen gyakorlati célokra is használható. Euklidésznek nem volt számítógépe, viszont zseni volt, így a nagyon hatékony algoritmus megtalálása nem okozott gondot neki.

5. A kereső algoritmus kissé okosabb formában

E pontban is a korábbi jelöléseket használjuk, elsősorban a 3. pontra hivatkozunk.

(i) A 3. pontban leírt algoritmus „vakon” dolgozik, végigvizsgálja az $1 \leq k \leq a-1$ indexek mindegyikét. Ám a Bézout-tétel bizonyítása során azt is beláttuk, hogy a pozitív maradékok R halmazát már az $1 \leq k \leq p-1$ indexek is teljesen meghatározzák, ahol $p = \frac{a}{(a,b)}$ a kiegészítő osztó. Természetes ötlet tehát a keresést p-nél megállítani. Nem tudjuk **előre** eldönteni, hogy hol álljon meg az algoritmus, mert nem ismerjük (a, b) értékét. Ám az algoritmus egyébként is minden lépésben ellenőrzi, hogy a kapott maradék nem zérus-e, mert csak pozitív maradékokat kell az aktuális minimummal összehasonlítani. Mint láttuk, p az első index, ahol zérus maradékot kapunk, tehát elérjük célunkat, ha az algoritmust az első zérus maradék felbukkanásakor megállítjuk.

(ii) Még egy további finomítással rövidíthetjük a keresést: akkor is állítsuk meg az algoritmust, ha $M(a, kb) = 1$, hiszen ekkor nyilvánvalóan megtaláltuk a legkisebb pozitív maradékot.

(iii) Mennyit javíthatnak a fenti (i) és (ii) pontban javasolt finomítások? Teljes általánosságban semmit, bizonyos esetekben sokat. Ha (a, b) viszonylag nagy, és ezért p viszonylag kicsi, az első javítás jelentős lehet. Ha viszont $(a, b) = 1$, az első módosítás nem változtat a lépések számán. Relatív prímek estén a második módosítás jelentősen rövidíthet, ha 1 hamar felbukkan, és semmit sem javít, ha későn.
Például,
$a = 1000000$, $b = 1000001$ esetén egymillió helyett egy lépés kell,
míg
$a = 927$, $b = 858401$ esetén 926 lépés, azaz 1 az utolsó lépésben kerül elő (nem kell kipróbálni, elég ellenőrizni, hogy $b = a^2 - a - 1$, ezért $(a-1)b$ maradéka 1).

(iv) Mint láttuk, a keresés a

$$b = h_1 a + r_1$$

képlettel indul, amely az első maradékot meghatározza, majd sorrakerülnek b többszörösei is:

$$kb = h_k a + r_k.$$

De k-val beszorozva az első egyenletet

$$kb = kh_1 a + kr_1,$$

vagyis kr_1 és r_k a-val osztva azonos maradékosztályba tartoznak. Ezek szerint a kb sorozat helyett a kr_1 számtani sorozatot is használhatjuk a kereső algoritmusban. Ez kényelmesebb, mert általában a maradékok kisebbek vagy sokkal kisebbek b-nél. Sőt még jobban járunk, ha ezúttal a kr_1 számtani sorozatot a k-val szorzás helyett az $r_k = r_{k-1} + r_1$ rekurzióval generáljuk, és amint r_k eléri az a számot, rögtön levonjuk a-t.
Nézzük meg a $(403, 155)$ számpár példáján, hogyan működik a keresés a leírt számtani sorozattal:

$$403 = 2 \cdot 155 + 93, \quad \text{tehát} \quad r_1 = 93.$$

Ekkor $r_1 + r_1 = 186 > 155$, tehát $r_2 = 186 - 155 = 31$. Ugyanígy $r_3 = r_2 + r_1 = 31 + 93 = 124$, $r_4 = r_3 + r_1 = 124 + 93 = 217 > 155$, tehát $r_4 = 217 - 155 = 62$, $r_5 = r_4 + r_1 = 62 + 93 = 155$, tehát $r_5 = 155 - 155 = 0$, az algoritmus megáll. Az R halmaz elemei rendre $\{93, 31, 124, 62\}$, amiből $r_{\min} = 31$, $k_{\min} = 2$. A másik Bézout-együttható, $-h_{\min}$ a $2 \cdot 403 + t \cdot 155 = 31$ egyenlet megoldása: $t = -5$.
A Bézout-azonosság: $2 \cdot 403 - 5 \cdot 155 = 31$.

Irodalom

[1] E. Bézout, *General theory of algebraic equations,* Translated from the 1779 French original by Eric Feron. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006. xxiv+337 pp.

[2] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers,* 4^{th} edition, Oxford University Press, Amen House, London E.C.4 1960.

[3] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming,* 2^{nd} edition, Volume 2, *Seminumerical Algorithms,* Addison-Wesley Publishing Comp, Reading, Massachusetts, 1973.

[4] G. Lamé, (1844) see page 318 of [3].

[5] L. Lovász, P. Gács, *Algoritmusok,* Műszaki Könyvkiadó, 1978.

[6] K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications,* 7^{th} edition, McGraw Hill Publishing Comp., New York, NY 10020, 2012.

[7] K. H. Rosen, *Elementary Number Theory and its Applications,* 5^{th} edition, Pearson, Addison Wesley Publishing Comp., Boston, San Francisco, New York, 2005.

Peter Hamburger, György Petruska: An alternative approach to the greatest common divisor and the Bézout's coefficients

We often teach courses where the Euclidean algorithm is covered and we sympathize with our students as they complain about the standard tedious means of finding the Bézout's coefficients. Our intention is to offer a student friendly algorithm, which can be helpful for students to understand the Bézout's theorem. At the same time we recommend that they write a short and simple computer implementation making it easy to test numeric examples. Success in numeric representations may better motivate students to have a go for the Euclidean and even for the continued fraction algorithm. Bézout's theorem states that if d is the greatest common divisor of two integers a and b, then there are integers x and y, (the Bézout's coefficients), such that $xa + yb = d$. Some of the usual proofs of Bézout's theorem are shortly investigated and a simple algorithm leading to an alternative proof is suggested. The reader should realize that the Euclidean algorithm (or the Continued Fraction algorithm, for that matter) is far more efficient than our algorithm. The length of the Euclidean or the Continued Fraction algorithms is logarithmic in terms of $\min(a, b)$, while our search is linear, see [4, 3]. On the other hand, in each step of the Euclidean algorithm a different denominator is used in the division, while in ours the same denominator applies. Our algorithmic proof does require neither mathematical induction nor any form of the well-ordering principle while the standard known proofs do, often in an implicit way. Thus, our algorithm trades efficiency for simplicity. We believe that the alternate approach provided in this manuscript would certainly be appreciated by students and faculty alike.

Peter Hamburger
Emeritus Professor of Purdue University,
Fort Wayne, IN
USA
e-mail: hamburge@ipfw.edu

György Petruska
Department of Computer Science,
Indiana University Purdue University
Fort Wayne,
Fort Wayne, Indiana
e-mail: petruskg@ipfw.edu.

BOLYAI JÁNOS, A „TEREMTŐ"

VARGA JÁNOS

„Ki mit írni méltat tanomról,
legyen az bár jó vagy rossz ...
nagy köszönettel veszem."
Bolyai János (1404/16)

Ennek a tanulmánynak legfőbb célja nem az, hogy új levéltári kutatási eredményeket tegyen közzé, hanem az, hogy a nem matematikus olvasóközönség számára a teljességre törekvés igénye nélkül, ugyanakkor részletesen csokorba gyűjtve bemutassa Bolyai János gazdag életművét, világra szóló matematikai eredményeit, megszabadítva ezzel az olvasót több tucat cikk, esetleg szakkönyv előkeresésétől, áttanulmányozásától és értelmezésétől, bizonyítva, hogy Bolyai János nemcsak világhírű geométer, „A tér abszolút igaz tudományának", *az első nemeuklideszi geometriának a megalkotója volt, hanem egyetemes matematikai zseni, akit a matematika szinte minden ága érdekelt, és aki korának számos alapvető problémájával a tudományos világtól teljesen elzártan sikeresen foglalkozott, olykor évtizedekkel megelőzve más nagy nevekhez fűződő felfedezéseket, vagy körülbelül ugyanabban az időben hasonlót alkotva, akinek több meglátása, kérdésfelvetése, sejtése beigazolódott, illetve bizonyítást nyert. George Bruce Halsted, az austini (Texas) egyetem volt matematikaprofesszora, Bolyai János egyetlen nyomtatásban megjelent munkájának, az Appendix-nek – melyet 2009-ben az UNESCO is bejegyzett a Memory of the World regiszterbe, mint a Világemlékezet részét képező művet – angolra fordítója úgy jellemezte őt, hogy: „... a halhatatlan János a világtörténelemben a lángésznek legtökéletesebb megtestesítője...". Mi magyarok is valljuk, Szentágothai János szintén világhírű, Nobel-díjra is többször jelölt agykutató tudósunkkal, Tudományos Akadémiánk volt elnökével együtt, hogy: „A magyar nép géniusza a tudomány területén, legmagasabb fokon Bolyai Jánosban öltött testet."*

Bolyai János
(1802–1860)[1]

Teremteni annyi, mint *„a semmiből létrehozni valamit"* – írja a lexikon. Ebben az értelemben tehát Bolyai Jánost „Teremtőnek" kell tekintenünk. Tóth Imre világhírű matematikus, filozófus, matematika- és művelődéstörténész és Surányi László matematikus egybehangzóan azt állítják, hogy az Appendixbe sűrített életmű maga a teremtés aktusa volt [24]. A már idézett Halsted professzor szerint: *„a legrendkívülibb két tucat oldal a gondolkodás történetében".* Vekerdi László ide kívánkozó gondolatával „szó szerint megteremtette az abszolút geometriát", minden előzmény nélkül, saját szavaival is „a semmiből egy újj, más világot teremtettem". Ez az új más világ egy új mértan, vagy pontosabban egy új geometria, ami alapjaiban különbözik az általunk középiskolában tanult, egy Eukleidész nevű görög matematikus által rendszerbe foglalt és róla elnevezett geometriától. Ezt az új geometriai rendszert – amely a maga nemében az *első* a világon – ma *Bolyai-geometriának* nevezzük. Ezt hozta létre, ha úgy tetszik teremtette az Erdélyben élő Bolyai János hadmérnök (vigyázat, képzettsége szerint nem matematikus!), akinek geometriája *abszolút,* illetve *hiperbolikus geometria* néven vált ismertté. (Ez valójában két geometria.)

Ezért az alkotásáért nyilvánosan soha, senkitől elismerést nem kapott, de hát egy teremtő ne is várjon semmilyen más magasabb rendű elismerést, mert ő a „legmagasabb", és mindenfajta öndicséret gyalázat.

Mint minden nagy dolog a világon, valami kicsiből fejlődik ki, mint a növény a magból. Az új geometria *„magva",* amiből aztán Bolyai geometriája is kifejlődött, egy rendkívül egyszerű, véges méretekben viszont nem könnyen belátható geometriai állítás (a matematikusok *posztulátumnak* nevezik), miszerint: Ha adott a síkban egy egyenes és rajta kívül egy pont, akkor a ponton át egy olyan egyenes fektethető, amely nem metszi az adott egyenest (vele párhuzamos). Ezen állítás – amely XI. axióma néven ismeretes – bizonyítására tett kísérletek mindegyike kudarcba fulladt, pedig minden valaminek számító matematikus megpróbálkozott vele. Ez lett a matematika Szent Grálja, a legkeményebb dió, amit közel 2000 évig senki sem tudott feltörni. Ma már tudjuk, hogy minden kísérlet eleve kudarcra volt ítélve, mert az állítás bizonyíthatatlan. Bolyai Farkas – Bolyai János apja – szintén évekig foglalkozott a problémával, de mint fiának írott egyik levelében írja: „irtóztató, óriási munkákat tettem, de életemnek minden világossága, minden öröme kialudt benne." Egyszer azt találta mondani az akkor tizenhat éves fiának, hogy „aki ezt a problémát megoldja, az akkora gyémántot érdemel, mint a Föld." Gauss volt időben az első matematikus a világon, aki szakmai alapossággal észrevette, hogy Euklidesz párhuzamosokra vonatkozó kijelentése – egy vele egyenértékű állítás felhasználása

[1]Márkos Ferenc festőművész alkotása. Az Amerikában élő művész a képet a marosvásárhelyi Kultúrpalota féldomborműve, az apja arcvonásait sokban megőrző Bolyai Dénes arcképe, és a rá nagyon hasonlító Klapka György honvédtábornok képmása alapján készítette iskolatársának, Weszely Tibornak ötlete és felkérése alapján.

nélkül – nem bizonyítható. Ezt igazolják azok a levelek, melyeket Gauss 1820 körül Wilhelm Olbers, Christian Gerling, F. A. Taurinus és más levelezőtársainak írt. Gausstól függetlenül, közel ugyanabban az időben ugyanerre a következtetésre jutott az Erdélyben élő Bolyai János is, aki ezt a gordiuszi csomót úgy vágta át, hogy egyszerűen elhagyta a XI. axiómát, így hozta létre a tér abszolút igaz tudományát, illetve azt az ellenkezőjével helyettesítette, megalkotva ezáltal a később hiperbolikusnak nevezett geometriát. Bolyai másik nagy gondolata, hogy ha már van többféle geometria, akkor melyik az, amelyik megvalósul? Amíg csak egy van, addig ez nem kérdés, de ha már több van, akkor már kérdés, hogy a Jó Isten ezek közül melyiket szerette? Ő erre is megadta a választ, megsejtette, hogy valójában az anyag határozza meg a geometriát. Ez a relativitáselmélet alapgondolata, amit később Einstein egy gyönyörű elméletben – közvetetten éppen Bolyai geometriai eredményére támaszkodva – kvantitative részletesen kidolgozott. Bolyainak ez a korai felismerése kézirataiba rejtve maradt hosszú évtizedeken keresztül, csakúgy, mint sok más matematikai eredménye, amelyeket később mások is felfedeztek, mivel ők maguk sem tudták, hogy valaki már megelőzte őket.

Kiket előzött meg Bolyai János, és miben?

Kurt **Gödel** (1906–1978) világhírű matematikust: a róla elnevezett ún. *nemteljességi tétel* alapkoncepciójának több mint 108 évvel korábbi *megsejtésével,* felismerésével. Természetesen nem magát a Gödel-tételt fedezte fel, hanem zsenialitásával csupán azt vette észre, hogy a XI. axióma nem bizonyítható. Ez viszont egy hatalmas lépés volt abban az időben! Ez a felismerése Gödel tételében teljes általánossággal kerül majd megfogalmazásra, miszerint minden olyan axiómarendszerben, amely ellentmondásmentes, és legalább a természetes számok axiómarendszerével azonos erősségű, nem teljes, azaz, van legalább egy olyan kérdés, amely a rendszerben megfogalmazható, de nem lehet véges lépésben bizonyítani, vagyis eldönthetetlen. Ezt az ún. nemteljességi tételt Gödel 1931-ben publikálta [1].

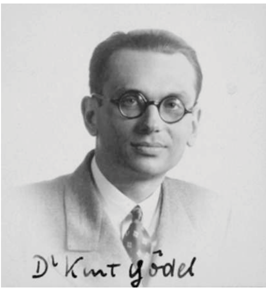
Ennek a tételnek a nem ismerete közrejátszott abban, hogy a XI. axiómát több mint 2000 évig senki sem tudta bebizonyítani, mivel az nem bizonyítható. Bolyai előtt mindenki bizonyítani akarta, már a görögök is, de nekik sem sikerült. Éppen ezért vette fel Eukleidész axiómának. Ha vesszük az euklideszi geometriát, és kivesszük belőle a párhuzamosok axiómáját, akkor az ún. „maradék" axiómarendszer alapján felépített geometriát *abszolút geometriának* nevezik. Ebből az abszolút geometriából a párhuzamosok axiómája nem bizonyítható. Maga Bolyai is először bizonyítani akarta, de 1823-ban rájött, hogy a XI. axióma sem nem bizonyítható, sem nem cáfolható. Ezt a tényt Bolyai Farkas a Gaussnak küldött Appendixhez mellékelt 1832. január 16-i levelében e szavakkal írja meg: „Fiam … bebizonyította, miszerint lehetetlen a priori (a tapasztalat alapján – a szerző) eldönteni, hogy a XI. axióma igaz-e, vagy sem." Bolyai János felfedezte, hogy egy geometriai axiómarendszerben megfogalmazható olyan állítás, amelynek igaz vagy hamis voltát eldönteni nem lehet. A *Gödel-tétel* is éppen ezt mondja, csak általánosan, minden axiómarendszerre vonatkozóan. Bolyai János csodálatos meglátása tehát Gödel univerzális tételével megerősítést nyert.

Milyen kár, hogy a geometrián kívüli területekre ezt nem gondolta végig, akkor most lehet, hogy őt tekinthetnénk a *nemteljességi tétel* teljes felfedezőjének is.

E felfedezésének legfőbb bizonyítéka egyetlen nyomtatásban megjelent művének, az Appendixnek hosszabb címe is: A tér abszolút igaz tudománya, *a XI. Euklidész-féle axióma (tapasztalat útján soha el nem dönthető) igaz vagy nem igaz voltától* független tárgyalásban: annak téves volta esetére a kör geometriai négyszögesítésével.

(Bolyai János ezzel a munkájával egyszerre három világcsúcsot is felállított, mivel ez a leghosszabb című, de ugyanakkor a legtömörebb, és – most ismét Halsted professzort idézve – egyben: *„a legrendkívülibb két tucat oldal a gondolkodás történetében.”*)

Bolyai Gausstól függetlenül jutott arra a következtetésre, hogy a XI. axióma nem bizonyítható, sőt az ellenkezője is feltehető. Ha ezt tesszük, azaz a párhuzamossági axióma Bolyai-féle változatát csatoljuk az abszolút geometriához, vagy másképpen mondva az euklideszi párhuzamossági axiómát a hiperbolikus axióma helyettesíti, az a Bolyai-geometria, vagy más néven *hiperbolikus geometria.* Ez azt mondja ki, hogy egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át több párhuzamos is húzható. Ezt a geometriát nem Bolyai, hanem Felix Klein nevezte először hiperbolikusnak 1871-ben.



Kurt Gödel

Niels Bohr

Bernhard Riemann

Niels **Bohr** (1885–1962) világhírű, Nobel-díjas fizikus 1916-ban a fizikában fogalmazta meg az ún. *korrespondencia-elvet.* Eszerint a kvantummechanika törvényei nagy kvantumszámok esetében meg kell, hogy egyezzenek a klasszikus mechanika törvényeivel [2]. A korrespondencia-elv (az egymás mellé rendelés elve) szerint egy magasabb rendű rendszer/elmélet/tétel magába foglalja az alacsonyabb rendűt. Tudománytörténeti hűség kedvéért meg kell említeni, hogy több mint 90 évvel korábban Bolyai János is alkotott egy magasabb szintű geometriai rendszert – a hiperbolikus geometriát –, amely speciális esetként magába foglal egy alacsonyabb rendűt – az euklideszi geometriát. Tehát példát adott egyfajta geometriai „mellérendelésre”, bár ő ezt sohasem fogalmazta meg általános elvként. Ez az elv a matematika alacsonyabb szintjén is működik. Az alábbi táblázat néhány ilyen esetet tartalmaz.

Bolyai geometriája valóban mintegy határesetet foglalja magába Euklidész geometriáját.

Magasabb rendű rendszer/tétel	Speciális esete	Speciális eset feltétele
Hiperbolikus geometria (Bolyainál $\boldsymbol{S}$-rendszer)	Euklideszi geometria (Bolyainál $\boldsymbol{\Sigma}$-rendszer)	$k \to \infty$
Kvantummechanika	klasszikus mechanika	nagy kvantumszámok
Középponti és kerületi szögek tétele	Thalész-tétel	középponti szög = 180°
Koszinusz-tétel	Pitagorasz-tétel	a háromszög egyik szöge 90°-os
Ptolemaiosz-tétel	Pitagorasz-tétel	húrnégyszögben az átlók és a szemközti oldalak is egyenlők egymással
Körhöz húzott érintő és szelőszakaszok tétele	Pitagorasz-tétel	a szelő átmegy a kör középpontján (Dugonics András bizonyítása)

Ha a hiperbolikus geometriában $k \to \infty$ (k paraméter tart a végtelenhez), akkor az euklideszi geometria törvényeit kapjuk. Ezt Bolyai már 1826-ban[2] kimutatta. Rájött tehát, hogy az ő új geometriája, mint magasabb rendű elmélet, speciális esetként magába foglalja az alacsonyabb rendű euklideszi geometriát. Ez valójában a korrespondencia-elv első felismerése a tudománytörténetben, bár Bolyai ezt így soha nem fogalmazta meg.

Nézzük erre egy konkrét példát a szerző levezetésével. Vezessük le a kör kerületének az euklideszi geometriában érvényes összefüggését a hiperbolikus geometria hasonló összefüggéséből. Az eredményt a $k \to \infty$ határérték kiszámításával kapjuk meg.

A kör kerülete a hiperbolikus geometriában (Bolyai jelölésével):

$$O_r = 2\pi k \cdot \operatorname{ctg} u = 2\pi k \cdot \operatorname{sh}\frac{r}{k}, \quad \text{ahol} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

A kör kerülete (K) az euklideszi geometriában tehát

$$K = \lim_{k\to\infty} 2\pi k \cdot \operatorname{sh}\frac{r}{k} = 2\pi \cdot |\infty \cdot 0| = 2\pi \cdot \frac{\operatorname{sh}\frac{r}{k}}{\frac{1}{k}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|\frac{\text{Bernoulli–L'Hospital}}{\text{szabályt alkalmazva}}\right| =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\operatorname{ch}\frac{r}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)'} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)' \cdot r = 2\pi \cdot 1 \cdot r = 2\pi r = d \cdot \pi,$$

ami valóban a kör kerülete az eulideszi geometriában. (A mérnökök inkább a $d \cdot \pi$ alakot használják, mivel az átmérő közvetlenül mérhető, míg a sugár nem.)

Bernhard **Riemann** (1826–1866) világhírű matematikust: a tér szerkezetét meghatározó fizikai tényező felismerésében. Riemann Gauss göttingai utóda, aki

[2]Ebben az évben bizonyította be Ábel, hogy a négynél magasabb fokú algebrai egyenletek gyökképlettel általában nem oldhatók meg.

1854-ben írt értekezésében kifejezi azon véleményét, hogy a tér szerkezetét fizikai tényezők határozzák meg, de nem tudta megmondani, hogy melyik az a fizikai tényező. Einstein ezt írta Riemannról: „tiszta elmélkedéssel jutott arra a felismerésre, hogy a geometria elválaszthatatlan a fizikától. Ezt az elvet 70 évvel később az általános relativitáselmélet valósította meg [4].” Bolyai túl azon, hogy ugyanezt Riemann előtt megsejtette és leírta, többet állított, mert kijelentette, hogy ez a fizikai tényező a *gravitáció,* azaz az általános tömegvonzás, a nehézkedés.

Albert **Einstein** (1879–1955) Nobel-díjas fizikust – akit a Time magazin az évszázad emberének választott –, a relativitáselmélet alapgondolatának felfedezésében. Bolyai több mint 80 évvel Einstein előtt leírja azt a gondolatát, miszerint a tér szerkezetét a gravitáció határozza meg.

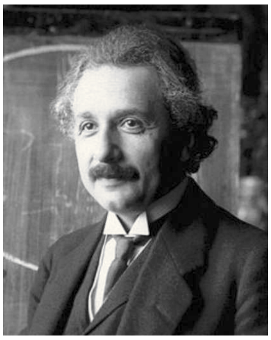
A Bolyai hagyaték 491. lapján ez olvasható: „az nehézkedés törvénye is szoros összveköttetésben, foljtatásban tetszik (mutatkozik) az űr természetével, valójával (alkotásával), miljségével; gondolom az egész természet (világ) foljása” – vagy mai helyesírással: *„A nehézkedés törvénye is szoros összeköttetésben, folytatásban mutatkozik a tér természetével, valójával, alkotásával, milyenségével; gondolom az egész természet folyásával* [16, 353. o.].”

„Ez a meglátása végeredményben annak felismerését jelenti, hogy *a fizikai gravitációs erőtér és a geometriai tér között belső összefüggésnek kell lennie* [10, 133. o.].”

„Ez valójában a relativitáselmélet alapgondolata, a *fizika geometrizálásának tézise* [4].” A nemrég elhunyt Toró Tibor fizikaprofesszor szerint: „Bolyai Jánost joggal tarthatjuk számon a XX. századi fizika egyik legszebb és legalapvetőbb fizikai alapeszméje: a fizika geometrizálása gondolatának legelső megfogalmazójaként [17, 146. o.].” Bolyai ezt a fontos tézist életében nem publikálta. De még ennél is nagyobb szenzációt keltett, amikor kiderült, hogy egy 1835-ös keltezésű kéziratában a nemeuklideszi alapra helyezett mechanika kidolgozását szorgalmazta. Első lépésként egy új, nemnewtoni gravitációs törvényt adott, amit Stäckel publikált először az 1914-ben kiadott *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai* című könyvében. Gábos Zoltán professzor Paul Stäckel könyvére alapozva azt írja, hogy Bolyai János ezzel kapcsolatos eredeti kéziratának nyoma veszett [14]. Oláh-Gál Róbert csíkszeredai Bolyai-kutató nemrégiben szerencsére rábukkant az elveszettnek hitt kézirati lapokra, de még ő is feltételezi, hogy esetleg még ettől hosszabb fizikai tárgyú Bolyai-féle eszmefuttatás is fellelhető lesz a kézirati anyagban [15].

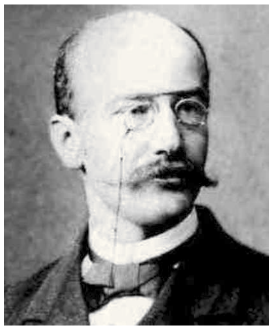
Bolyai János erőtörvényével tehát fél évszázaddal előzte meg korát.

Carl Friedrich **Gauss** (1777–1855) matematikust, a „matematika fejedelmét”: az első nemeuklideszi geometria felfedezésében és részletes kidolgozásában. *„... ezt a fiatal geométert, Bolyait, elsőrangú lángésznek tartom.”* – írta Gauss 1832. február 14-én barátjának, Christian Ludwig Gerling marburgi matematikusnak, miután elolvasta a Bolyai Farkas által neki küldött Appendixet. Gauss 30-35 éves vizsgálódásai során – melyből semmit nem tett közzé –, ért el eredményeket, de rendszerét nem dolgozta ki teljes mélységében, csak tervezte. Így nem tekinthető a hiperbolikus geometria megalkotójának. Szénássy Barna matematikatörténész és Prékopa András akadémikus professzorok részletesen tanulmányozták Gauss ezzel kapcsolatos munkásságát, és megállapították, hogy ez valóban így



Albert Einstein

Carl Friedrich Gauss



Ferdinand von Lindemann

van. A témában való tájékozottságát viszont egyértelműen bizonyítja az a szakszerű hozzászólása az Appendix-hez, amit barátjának, Bolyai Farkasnak 1832. március 6-án küldött levélben leírt. E levélben is dicsérő szavakkal illeti János teljesítményét: *„nagyon örömteli számomra, hogy éppen régi barátom fia az, aki ily sajátos módon megelőzött* [kiemelés tőlem-VJ]". Ez a mondata egyértelműen eldönti a prioritást.

A Bolyai iratokban esetleg lehetnek még más olyan eredmények, amelyekkel János megelőzte Gausst, akit apjához írott egyik levelében „a földgömb és az évezred matematikusainak herkulese" jelzővel illet, akit példaképnek, de ugyanakkor túlszárnyalandó vetélytársnak is tekintett, és ugyanitt megjegyzi, hogy „sok egyebet is létesítettem, mit Gauss lehetetlennek declarált [9, 181. o.]"

Ferdinand von **Lindemann** (1852–1939) német matematikust: a kör négyszögesítés[3] lehetetlenségének felismerésében. Ezt a gondolatát az Appendix utolsó, 43. paragrafusában a következő tömör formában fejezi ki: „vagy érvényes Euklidész XI. axiómája, vagy pedig lehetséges a kör mértani kvadratúrája[4] (négyszögesítése – a szerző)". Tehát a kör négyszögesítésének lehetséges volta kizárja a XI. axiómát. Habár Bolyai János látta be az emberiség történetében talán legelőször, hogy a kör négyzetesítése az euklideszi geometriában lehetetlen, – ezzel Lindemannt 50 évvel megelőzte –, a végső bizonyítását Lindemann adta meg. A matematikatörténetben azért tulajdonítják neki a felismerést is, mert 1882-ben ő igazolta, hogy a π transzcendens szám, azaz nem lehet megoldása algebrai egyenletnek.

A technika történetében gyakran megesik, hogy ha egy eszköz iránti igény jelentős mértékűvé válik, akkor szinte biztosak lehetünk benne, hogy az ezzel kapcsolatos találmány(ok) közel azonos időben különböző helyeken is megszülethetnek. Hasonló a helyzet a tudomány területén is. Ha egy téma/tétel több kutató közösség vagy egyén, intenzív érdeklődésének középpontjába kerül, akkor itt is várhatók párhuzamos felfedezések. Bolyai János esetén is szembesülünk ezzel a jelenséggel, amelyre apja e szavakkal hívta fel a figyelmét: *„az eszméknek mintegy megvan*

[3]Euklideszi geometria esetén a *kör négyzetesítése* lenne a matematikailag igazán precíz elnevezés.

[4]A hiperbolikus geometria esetén viszont majdnem teljesen pontos az elnevezés, mert abban nincs is négyzet, csak négyszög, és bizonyos esetekben elvégezhető a kör „négyszögesítése", vagyis szerkeszthető egy adott kör területével egyenlő területű *négyzet*.

a maguk korszaka, amikor a különböző helyeken egy időben fedeztetnek fel, amint tavasszal az ibolyák mindenütt kikelnek, ahol csak süt a nap."

Az apa jóslata beteljesedett, hiszen Bolyai Jánoshoz hasonló geometriai gondolatokra jutott egy tőle távol – Kazányban – élő matematikus is, illetve maga Bolyai is fedezett fel, bizonyított be olyan tételeket, melyeket tőle függetlenül mások is felfedeztek, illetve bebizonyítottak.

Kikkel volt Bolyai Jánosnak párhuzamos felfedezése? Milyen párhuzamos felfedezéseket tett?

Nyikolaj Ivanovics **Lobacsevszkij** (1792–1856) kazányi matematikussal szinte időben párhuzamosan, tőle függetlenül megoldotta a párhuzamosok problémáját, azaz felfedezte a világ első nemeuklideszi geometriáját.

George Bruce Halsted, az austini (Texas) egyetem volt matematikaprofesszora, aki Bolyai művét, az Appendixet 1891-ben lefordított angolra, összehasonlította Bolyai felfedezéseit *Lobacsevszkijével,* de a nemeuklideszi geometria megteremtőjeként Bolyait tiszteli: *„... a halhatatlan János a világtörténelemben a lángésznek legtökéletesebb megtestesítője..."*. Művéről pedig azt írta, hogy az *„a legrendkívülibb két tucat oldal a gondolkodás történetében"*[5]. A másik tudós, aki sokat foglalkozott a Bolyaiakkal, *Paul Stäckel* német kutató volt. Ő is Bolyai Jánost ismerte el a nemeuklideszi geometria megteremtőjeként. *„... Bolyai János abszolút geometriáját teljesen önállóan fedezte fel és dolgozta ki."* – írta Stäckel.

Lobacsevszkij a hiperbolikus geometria tételeit, míg *Bolyai* a két esetet együtt kezelve a kétféle geometria – euklideszi és hiperbolikus – közös részét, az *abszolút geometria* tételeit dolgozta ki.

Míg Lobacsevszkij (akinek cikke egy kazanyi egyetemi folyóiratban látott napvilágot 1829 és 1830 között) csak egy olyan geometria létezésének lehetőségét bizonyította, amelyben Euklidész V. posztulátuma hamis, a Bolyai által leírt abszolút geometriai vizsgálatok azonban teljesen függetlenek az előbb említett euklideszi elvtől, és a görbült tér különböző fajtáin is alkalmazhatóak. Ezzel az elméletével újraértelmezte a párhuzamosságot, és bemutatta a hiperbolikus sík különféle nevezetes alakzatait. A két geometriát együtt tárgyalta, és párhuzamot vont a gömbi geometriával is. Az ifjabb Bolyai felfedezését 1820 és 1824 között – nagyrészt a bécsi katonai akadémián töltött évek alatt – dolgozta ki, majd 1823. nov. 3-án Temesvárról már a következőket írta apjának: „A feltételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, elkészítem, s mód lesz, a paralellákról egy munkát adok ki"

Apjának 1825 elején mutatta meg a már kidolgozott elméletet. Johann Wolter von Echwehrnek, bécsi akadémiai matematikatanárának 1826-ban Aradon adja át ennek egy kéziratos német nyelvű fogalmazványát, ami sajnos – eddigi tudásunk szerint – elveszett. Műve végül 1832-ben jelent meg először nyomtatásban Appendix néven, apja Tentamen[6] c. könyve függelékeként.

Az új geometriát a szakirodalom *Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriának* nevezi. Munkájuk korszakalkotó jelentőségét csak a XX. század elején ismerték fel,

[5]George Bruce Halsted: One Hundred Books Famous in Science.

[6]Nagy adósságunk, hogy Bolyai Farkas ezen művét a mai napig nem fordították le magyarra.

mert ez biztosított közvetett matematikai alapokat az általános relativitáselmélet kidolgozásához.

Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij

Paolo Ruffini

Niels Henrik Abel

Paolo **Ruffini** (1765–1822) olasz és Niels Henrik **Abel** (1802–1829) norvég matematikusokhoz hasonlóan megoldotta az algebra 300 éves problémáját, ő is felfedezte a róluk elnevezett híres tételt, amely szerint az ötöd vagy magasabb fokú algebrai egyenletekre nem lehet olyan gyökképletet adni, amelynek segítségével az együtthatókból ki lehetne számítani az egyenlet gyökeit, azaz ezek az egyenletek algebrai módszerekkel (vagyis a négy alapművelet, a hatványozás és a pozitív egész kitevőjű gyökvonás véges sokszor való alkalmazásával) általában nem oldhatók meg. A tételt – amely a teljes komplex számtestben érvényes – először P. Ruffini olasz matematikus találta meg 1799-ben, majd N. Abel norvég matematikus bizonyította be hibátlan gondolatmenettel 1826-ban [5]. Bolyai János is megoldotta az algebrában a Ruffini–Abel-tételt, amit, mint írja, két módon tudott bizonyítani. Az egyik a Ruffini hibás bizonyításának általa „illőleg megjobbított, s tökélyre vitt szép eredeti, elmés eszméje", valamint egy *általa talált másik bizonyítással.* Ez utóbbi bizonyítás sajnos nem található meg feljegyzései között, valószínűleg elveszett, vagy ott bujkál a hatalmas kézirattömegben, felfedezésre várva. Kijelentésének szavahihetőségét erősíti egyik gondolata – és ez reményt ad arra, hogy esetleg előkerül ez a bizonyítása is –, miszerint *„Az igazságot tanilag és erkölcsileg határtalanul szeretem."* Bolyai nem tudott arról, hogy Abel a tételre teljes bizonyítást közölt. Ezért elhatározta, hogy „Az Emberiség előtt kedves szolgálatot teendek: ha e bogok bogját ... szerencsésen föl-oldandom. [9, 151. o.]" Erőfeszítéseinek eredményességéről így ír: „... szerencsésen *a dolog igaz erére találnom és célhoz is jutnom hála Istennek sikerült* is. [9, 149. o.]" Egyik helyen ezt írja: „Tan. [Tétel] *Négynél fölsőbb vagyis legalább öt-rangú (geber)* [ötödfokú algebrai] *általános egyenletet geberül* [algebrailag] *föloldani lehetetlen".* „1830-ban egy új csillag tűnt fel a tiszta matematika egén, nem sejtett ragyogással, hogy hamarosan kialudjon: Évariste *Galois.*" – írja Felix Klein. Évariste **Galois** (1811–1832) állította fel annak feltételeit, hogy egy négynél magasabb fokú egyenlet megoldható legyen. E feltételek megállapításához egészen új matematikai elméletet kellett teremtenie – a *csoportelméletet.* Kidolgozta annak feltételét is, amely mellet a p-edfokú egyenlet, ha p törzsszám, egyszerű egyenletekkel megoldható [18, 447. o.]. Bolyai nem ismerte Galois eredményeit sem. Mindenesetre Bolyai feljegyzéseiből világosan kitűnik, hogy kortársaitól függetlenül ő is eljutott a Ruffini–Abel-tételig és annak bizonyításáig, ami mai szemmel mérve is igen jelentős matematikai teljesítménynek tekinthető. Micsoda véletlen egybeesése a dátumoknak, hogy Bolyai ugyanabban az évben született, mint Abel, és szintén 1826-ban ért el kimagasló matematikai eredményt. Sorsuk még abban is közös, hogy bár annak ellenére, hogy hihetetlen eredményeket értek el, nagyszerű felfedezéseket tettek, életükben igen kevéssé ismerték őket. A „matematika hercege" (ez lenne a helyes fordítása a *Princeps mathematicorum*-nak, mert a 'princeps' herceget jelent és nem fejedelmet! – a szerző) Gauss, nyíltan egyiküket sem ismerte el, sőt, eredményüket irigyelve inkább elhallgatta őket. Nagyszerű eredményeikről még egy sort sem írt az általa szerkesztett matematikai folyóiratba. Mindketten egész életükben szegénységben éltek, és szegényen haltak meg. És ez már valóban csak játék a gondolattal, hogy ha Bolyai János ma élne, akkor biztosan Abel-díjas lenne.

Évariste Galois

Carl Friedrich Gauss

William Rowan Hamilton

Carl Friedrich **Gausstól** függetlenül és körülbelül vele egy időben dolgozta ki a *komplex egészek aritmetikáját.* Bolyai János jól ismerte Gauss Disquisitiones arithmeticae című számelméleti munkáját, de a komplex számokkal foglalkozó igen jelentős dolgozatai közül sajnos már jóval kevesebbet. Így János több olyan eredményre jutott, melyeket Gausstól függetlenül ő is felfedezett. Sőt még olyan meglátásai is voltak, amelyek Gaussnál nem találhatók meg. Az adatok tanúbizonysága szerint Bolyai arra törekedett, hogy a számelmélet bizonyos fogalmait és tételeit a komplex számokra is kiterjessze. Majd vizsgálódásai során a számelmélet alaptételének megfelelőjeként a komplexek körében is eljut a következő tételhez: minden $a+bi$ alakú [komplex egész] szám (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelműen felbontható véges számú prímek szorzatára. Ha annak idején Bolyai ilyen irányú eredményeiről, ahogyan tervezte, egy kis terjedelmű munkát tudott volna kiadni, akkor ma a tudománytörténet világszerte minden bizonnyal úgy is számon tartaná őt, mint a komplex számok elméletének egyik legjelentősebb megalapozóját.

Sajnos Gaussal ellentétben ő nem készített összefüggő dolgozatot próbálkozásairól. Bolyai elmélete nem olyan kimerítő és részletes, mint Gaussé, az alkalmazásokban viszont túlszárnyalta Gausst. A komplex egészekre vonatkozó megállapításait nagyszerűen felhasználta különböző számelméleti tételek – például Fermat karácsonyi tételének – bebizonyításánál.

William Rowan **Hamilton** (1805–1865) ír matematikushoz hasonlóan a *komplex számokat rendezett valós számkettősként fogja fel,* igaz, még nem éppen olyan kiforrott formában, mint kortársa.

Bolyai korát megelőző gondolatokat vallott a komplex számok elméletében is. 1837 őszén a lipcsei Jablonowski Társasághoz benyújtott, Responsio nevű, mindössze nyolc oldal terjedelmű, 11 paragrafusból álló pályaműve sok új és értékes gondolatot tartalmaz. Eredeti meglátást rejt a 8. §, melyben az apjának a valós számok logaritmusára vonatkozó újszerű felfogását a komplex számok esetére általánosítja. Mivel János nem ismerte A. Cauchy komplex függvénytani vizsgálatait, ezért ez az eredménye eredetinek tekinthető. A matematikatörténészek a Responsio legértékesebb részének a 9. §-t tartják. Ebben szerzője az Appendixre való egyszerű hivatkozással közli az abszolút trigonometria háromszögre vonatkozó két fontos képletét, megemlíti a *hiperszféra* fogalmát, továbbá, hogy ezen a felületen érvényes hiperbolikus geometria trigonometriai képletei formailag megegyeznek a k/i sugarú gömb trigonometriájával. Ezekkel a vázlatosan közölt észrevételekkel azt igyekezett igazolni, hogy az i képzetes egységnek milyen óriási jelentősége van az általa megalkotott geometriai rendszerben, és ezzel a komplex számoknak új, eddig ismeretlen mértani alkalmazása tárult fel. A pályázatban kitűzött kérdésre a 10. és 11. §-ban igyekszik választ adni. Alexits György szerint „a Responsio egymagában elég lenne ahhoz, hogy a Bolyai névnek helyet biztosítson a matematika történetében." Ennek ellenére sajnálatos módon a Responsiót még csak kritikára sem méltatták, így Bolyai életében nyomtatásban sem jelent meg. A pályázat eredményének kihirdetése után mindkét Bolyai visszakérte dolgozatát.

Ennek a szerencsés lépésnek köszönhető, hogy a Responsio kézirata nem veszett el, és azt Stäckel publikálta először 1914-ben.

James Hopwood **Jeans** (1877–1946) matematikus–fizikus–csillagászt: a nevét viselő számelméleti tétel több mint 40 évvel korábbi felfedezésével. A számelméletre, vagy ahogy Gauss nevezte, a „matematika királynőjére", apja hívta fel János figyelmét. Jánost a számelmélet valósággal elbűvölte. (Olyannyira, hogy még bűvös négyzetet is szerkesztett! [9/113]) *„A számelméletben nem csak az egész számok, hanem az egész tan legfontosabb, leghasznosabb, leglényegesebb, legszebb, legérdekesebb, legkecsesebb feladatait találjuk."* – vallotta [9/83]. Ezen belül is legtöbbet a prímszámokkal vesződött. *„Az egész számtan, sőt az egész tan mezején* – vallja – *alig van szebb és érdekesebb ... mint a főszámok* [prímszámok] *oly mély homályban rejlő titka*." Már gyermekkorában elgondolkodott azon, hogy végtelen sok prímszám létezik-e. A prímek egy csoportját pszeudoprímnek (vagy álprímeknek) nevezzük. Az n pozitív egész szám pszeudoprím, ha minden a egészre $a^n - a$ maradék nélkül osztható n-nel. [Ezt a matematikusok így írják: $a^n \equiv a \pmod{n}$, és azt mondják, hogy ez egy kongruencia. Pl. $19 \equiv 7 \pmod{3}$ azt jelenti, hogy $19 - 7$ maradék nélkül osztható 3-mal, vagy másként, $19 : 3$ és $7 : 3$ esetén a maradék mindkét esetben 1, azaz 19 és 7 ugyanabba a maradékosztályba tartozik.] $a = 2$ esetén $n = 341$ pszeudoprím, mert $2^{341} - 2$ osztható 341-el. A kis Fermat-tétel szerint minden prím egyben pszeudoprím is. Viszonylag kevés olyan pszeudoprím van, amely nem prím. Ahhoz, hogy meghatározzuk, prímszám-e egy egész szám, vagy összetett, hasznos lehet először megnézni, hogy pszeudoprím-e. A legtöbb összetett számra már ez megmutatja, hogy összetett. A legkisebb 2-höz viszonyított pszeudoprímet Bolyai János fedezte fel. Ez éppen az előző példában szereplő $341 = 11 \cdot 31$ szám, amelyről kimutatta, hogy ha $2^{11-1} - 1$ osztható 31-gyel, és $2^{31-1} - 1$ osztható 11-gyel, akkor ezekből következik, hogy $2^{11 \cdot 31 - 1} - 1$ is osztható $11 \cdot 31 = 341$-gyel, amely szám pszeudoprím. Általánosan fogalmazva tehát azt mondhatjuk, hogy ha p és q prímszámok, a pedig egy sem p-vel, sem q-val nem osztható egész szám, akkor, ha $2^{p-1} - 1$ osztható q-val, és $2^{q-1} - 1$ osztható p-vel, akkor ezekből következik, hogy $2^{p \cdot q - 1} - 1$ is osztható $p \cdot q$-val. Ez éppen a pszeudoprímekkel kapcsolatos *Jeans-tétel.* Szomorú érdekesség, hogy ez a szép Bolyai-tétel a matematikai irodalomban Jeans-tétel néven ismeretes. Ha Bolyai publikálta volna eredményét, azzal mindenképpen megelőzte volna James Hopwood Jeans 1898-as dolgozatát és akkor ezt a tételt ma valódi felfedezője, Bolyai János nevével tartaná számon a matematika története [7]. A pszeudoprímek egyébként a XX. század 70-es éveiben kerültek az érdeklődés középpontjába a titkosítások kapcsán.

Kiket szárnyalt túl Bolyai és mivel?


James Hopwood Jeans


Pierre de Fermat


Leonhard Euler

Pierre de **Fermat** (1601–1665) jogász és híres műkedvelő matematikust, a róla elnevezett tétel egyszerű bizonyításával. „Fermat az ún. „descente infinite" vagy „végtelen leszállás" módszerével bizonyította be a tételt [9, 97. old.]." Ez bonyolultabb, mint Bolyai bizonyítása. Ezt a nevezetes tételt a matematika története Pierre Fermat-nak tulajdonítja, bár néhány évvel előtte A. Girard (1595–1632) is megfogalmazta. Mivel Fermat felfedezését egy 1640. december 25-én kelt levelében közli barátjával, M. Mersenne-nel, a tételt szokták „Fermat karácsonyi tételének" is nevezni. Fermat sejtése a számelmélet egyik klasszikus tétele, amely szerint minden $4m+1$ ($m \in \mathbb{N}$) alakú prímszám a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelműen felírható *két* egész szám négyzetének összegeként. Emiatt nevezik *„két négyzetszám tételnek"* is. Például $5 = 4 \cdot 1 + 1 = 2^2 + 1^2$, $13 = 4 \cdot 3 + 1 = 3^2 + 2^2$, $17 = 4 \cdot 4 + 1 = 4^2 + 1^2$ stb.]. A tételt Euler is bebizonyította, de nagyon bonyolultan és hosszadalmasan (55 oldalon!).

Leonhard **Euler** (1707–1783) matematikust: *Fermat karácsonyi tételének* egyszerű bizonyításával. A Teleki Tékában is fellelhető volt Eulernak az a műve, melyben ezt a tétel bizonyította. Az 55 oldalas bizonyítás közel kétszer olyan hosszú, mint az egész Appendix. Euler bizonyítását Bolyai Farkas is túl hosszúnak ítélte, ezért levélben kérte fiát, hogy próbálja rövidebben bebizonyítani ezt a matematikai igazságot. János Eulertől egyszerűbb bizonyítást adott a tételre, sőt mi több, apjához írott egyik levelében két oldalon(!) négy(!) bizonyítását írta le a tételnek. A negyedik bizonyítás 2 sorból(!) állt. Bolyai Jánosnak ez a bizonyítása minden bizonnyal a KÖNYV-be való. (Erdős Pál szerint *„Istennek van egy* KÖNYV, *amelyben minden tétel és a legjobb bizonyítások benne vannak. Ha nem is hiszel Istenben, a Könyvben hinned kell! Talán az Isten maga a* KÖNYV. – hirdette. *Egy matematikus csak akkor lehet nyugodt, ha egy problémának nem csak egy bizonyítását, hanem a Könyvből származó bizonyítását találja meg."*) Kiss Elemér professzor mutatott rá, hogy a fenti tétellel kapcsolatban még 2000-ben is jelent meg olyan matematikai közlemény, amelyet János már 160 évvel korábban kidolgozott [12].

Nem kizárt, hogy a fenti névsor még folytatódhat, hiszen maga Weszely Tibor, a neves Bolyai-kutató nyilatkozta, hogy „Bolyai Jánosnak különösen az *analízis* területén vannak még feldolgozatlan feljegyzései, de a matematika más ágához tartozó írásai is *»várnak a napfényre«*, ahogyan ő fogalmazott [5]."

Oláh-Gál Róbert Bolyai-kutató is hasonlóan vélekedik, amikor azt írja, hogy „még sok meglepetést hozhat a Bolyai-kéziratok megfejtése [15]."

Bolyai János mindenkit megelőzött:

– Az *abszolút geometria* felfedezésével; sem Gauss leveleiben, sem Lobacsevszkij dolgozataiban nincs szó az abszolút geometriáról, ezért joggal állítható, hogy az abszolút geometria felfedezése egyedül Bolyai János érdeme. Előtte sem, de vele egy időben sem gondolt senki annak megalkotására. Vekerdi László ide kívánkozó gondolatával: „Bolyai János nem a nemeuklideszi geometriát fedezte fel. Neki a nemeuklideszi geometria ingyen ajándékként adódott, miután fölfedezte, szó szerint megteremtette az abszolút geometriát, azt a Harmadikat, ahonnét a Másik kettő kibontotta a maga külön és önmagában megtámadhatatlan igazságát [21]". Tehát a Bolyai által abszolútnak nevezett geometria azokat a tételeket tartalmazza, melyek mind az euklideszi (Σ rendszer), mind a hiperbolikus (S rendszer) geometriában egyaránt érvényesek.

– A *fizika geometrizálása* gondolat megfogalmazásával.

– Annak belátásában, hogy *a kör négyszögesítése az euklideszi síkban lehetetlen.*

– Annak felismerésével, hogy a *fizikai gravitációs erőtér és a geometriai tér között belső összefüggésnek kell lennie.*

– A *modellmódszer első alkalmazásával,* amikor az Appendix 21. §-ában kimutatta, hogy ha a paraszférán a paraciklust tekintjük egyenesnek, akkor a paraszférán az euklideszi geometria érvényes. Tehát a hiperbolikus térben modellt szerkesztett – paraszférát –, amelyen az euklideszi geometria érvényes. Ez a fontos tulajdonság nagy szerepet játszik Bolyai ellentmondásmentességi vizsgálataiban. A modell létezése azt bizonyítja, hogy ha az S rendszer ellentmondástalan, akkor ellentmondástalan a Σ rendszer is. Ő azonban a modellmódszert arra használta, hogy az S-ben érvényes tételeket a Σ-ban érvényes tételekből vezesse le.

– Abban, hogy kimondta: *„a nemeuklideszi geometria éppen úgy ellentmondásmentes, mint az euklideszi."*

„Az igazság az, hogy Bolyai felfedezése két alapvető szempontból volt döntő. Egyrészt, hogy a geometriában megadta ezt a lehetőséget, másrészt a matematikai logikában először volt olyan, hogy egymásnak látszólag két ellentmondani tűnő tény is megvalósulhat. Tehát az euklideszi geometria is lehetséges, meg a hiperbolikus geometria is … hogy nem csak egyféleképpen szabad gondolkodni, hanem többféleképpen is. Ebben világjelentőségű áttörést jelentett ez az új hiperbolikus geometria." – összegezte Bolyai hatását Böröczky Károly akadémikus [12].

„Bolyai másik nagy gondolata, hogy ha már van többféle geometria, akkor melyik az, amelyik megvalósul? Amíg csak egy van, addig ez nem kérdés. De ha már több van, akkor már kérdés, hogy a jó Isten ezek közül melyiket szerette? – teszi fel a kérdést Lovas István akadémikus [12].

Az Appendix 33. paragrafusa bizonyítja, hogy Bolyait ez a kérdés is komolyan foglalkoztatta. Itt ugyanis egy feladatot fogalmaz meg az általa felfedezett hiperbolikus geometria valóságot leíró k paraméterének meghatározására. Gábos Zoltán fizikaprofesszor mutatta ki, hogy ez a paraméter az Einstein-féle kozmológiai állandóval hozható kapcsolatba [14].

Ki képes arra, hogy a tudománytörténet eme óriásait akár 100 évvel is megelőzze, ha nem egy géniusz! Eötvös Loránd szavaival mindenképpen egyetértve el kell fogadni, hogy „csak az az igazi tudomány, amely világra szól; … ez valósult meg Bolyai alkotásával egyszer; ilyen teljes mértékben talán egyetlenegyszer." Szentágothai János szavai egyáltalán nem túlzóak, amikor azt írja, hogy *„A magyar nép géniusza a tudomány területén legmagasabb fokon Bolyai Jánosban öltött testet."* Bolyai János nagyságát Weszely Tibor Bolyai-kutató így jellemezte [13]:

- a mai napig a magyar nemzet legnagyobb matematikusa;
- egy szerencsétlen életű ember, akiben nagyon érződik a magyar sors;
- minden idők egyik legnagyobb matematikusa.

Felvetődik a kérdés, hogy mi mindennel gazdagíthatta volna még a matematika tudományát ez a zseni, ha kedvező körülmények között folytathatta volna kutatásait, és publikálhatta volna felfedezéseit [9]. Egy Pierre-Simon Laplacenak tulajdonított mondás kifejezi Euler hatását a matematikára.

„Olvasd Eulert, olvasd Eulert, ő mindannyiunk mestere." Maga Gauss, a matematika fejedelme is úgy nyilatkozott, hogy „Euler műveinek tanulmányozása mindig a legjobb iskola lesz. Semmi sem helyettesítheti." Bolyai János nem csak a geometriában alkotott nagyot. „Ő egyetemes matematikai zseni volt, aki kora matematikájának minden olyan ágával foglalkozott, amelyekről tudomást szerzett [19]." A fentiekben nem is említett analízissel kapcsolatosan Domáldról 1844-ben tudatja apjával, hogy *„Az integrálszámításban is tömérdek új könnyű, tiszta tanom van ...* [9, 164. o.]" Más, alkotóbb légkörben, kellő elismertség esetén a matematika sok területére kiterjedő érdeklődésével, párját ritkító tehetségével egy második Euler lehetett volna.

Köszönetnyilvánítás. A cikk szerzője köszönetet mond *Dr. Böröczky Károly* akadémikusnak, *Dr. Weszely Tibor,* és *Dr. Szabó Péter Gábor* Bolyai-kutatóknak a cikk előzetes átolvasásáért és értékes észrevételeikért.

Irodalom

[1] Héjjas István: *Illúzió és valóság,* Aszklépiosz Kiadó, 1977, In.: 61–62 o. Wikipédia: *Gödel, Göde-tétel* címszavak

[2] `http://tudasbazis.sulinet.hu/hu/termeszettudomanyok/fizika/eletrajzok/niels-bohr`.

[3] Ribár Béla: *Magyar származású tudósok,* Újvidék, 1996. Jugoszláviai Magyar Művelődési Társaság. 125 p. (A Jugoszláviai Magyar Művelődési Társaság kiskönyvtára Természettudomány és tudománytörténet.)

[4] Toró Tibor: Bolyai János, a dinamikai geometria értelmezésének előfutára, *Fizikai Szemle,* 1992/05, 187. o.

[5] *A Bolyai-kép formálói* – interjú Kiss Elemér és Weszely Tibor marosvásárhelyi kutatókkal.

[6] ifj. Gazda Itván – Sain Márton: *Fizikatörténeti ABC,* Tankönyvkiadó, 1989, 28. o.

[7] T. Dénes Tamás: *Bolyai János valódi arca;* Bolyai János halálának 150. évfordulóján, 11. o.

[8] Kiss Előd-Gergely – Szucher Ervin: *Digitalizálták Bolyai János életművét,* Krónika, 2012,
`http://www.kronika.ro/index.php?action=open&res=69984`.

[9] Kiss Elemér: *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából,* 2. bőv. kiadás, Budapest, Typotex, 2005. [227–232. o.: Bolyai által használt műszavak és jelölések (118 db)].

[10] Weszely Tibor: *Bolyai János matematikai munkássága,* Kritérion Kiadó, Bukarest, 1981, 382. o.

[11] Oláh-Gál Róbert: Felébresztett tündérek a Teleki–Bolyai Könyvtárban, *Székelyföld,* 2002. október.

[12] *Bolyától a világhírig,* Egy szellemóriás nehéz élete, Életrajzi film, MTV, 2002, 43 p. Forgatókönyv: Kremsier Edit, Riporter: Gál Jolán, Rendező: Szőnyi G. Sándor. A filmben megszólalnak: Ács Tibor, Benkő Samu, Böröczky Károly, Császár Ákos, Kiss Elemér, Prékopa András, Weszely Tibor.

[13] *Találkozás a végtelennel,* Életrajzi film, MTV, 2002, 54 p. Rendező: Pataki Éva, Operatőr: Pap Ferenc. A filmben megszólalnak: Benkő Samu, Gábos Zoltán, Jenkovszky László, Jurij Sitenko, Kiss Elemér, Lovas István, Oláh-Gál Róbert, Toró Tibor, Weszely Tibor.

[14] Gábos Zoltán: A Bolyai-Lobacsevszkij-féle gravitációs törvény, *Fizikai Szemle,* **50/1** (2000), 13.

[15] Oláh-Gál Róbert: Bolyai János egyik leghosszabb fizika tárgyú kéziratáról, *Fizikai Szemle,* 2008/9., 302. o.

[16] *Bolyai János élete és műve* (Bolyai János Emlékkönyv, születésének 150. évfordulójára). Tanulmánykötet, Szerk. Fodor Ernő, Bukarest, 1953, Állami Tudományos Könyvkiadó, (Interprinderea Poligrafică Kolozsvár). 448, [4] p., 15 t (egy kihajtható). Szövegközti ábrákkal. Kiadói vászonkötésben. 24,4 cm.

[17] Neumann – Salló – Toró: A semmiből egy új világot teremtettem; Facia, Temervár, 1974.

[18] Loeopold Infeld: *Akit az istenek szeretnek,* Gondolat, 1976, 462. o.

[19] Kiss Elemér: Kétszáz éve született Bolyai János, *KöMaL,* 2002/december, 457. o.

[20] Fotók forrása: `www.wikipedia.hu`.

[21] Holló Berta: *Bolyai János élete és munkássága,* 2003, Topolya, Vajdaság. Miskolci Egyetem, Matematikai Intézet, Matematikai Önképzőkör.

[22] Varga János: A Bernoulli-egyenlőtlenség egyszerű bizonyítása, *MatLap,* 2014/2, Kolozsvár.

[23] *Bolyai emlékkönyv,* EMT, 2002, 125 o.

[24] Tóth Imre – Surányi László: *Bécstől Temesvárig: Bolyai János útja a nemeuklideszi forradalom felé,* Typotex, 2002, 124 o.

[25] Seebauer Imre: *A térválasztás kompetenciájának fejlesztése a sakkjátékban,* Szolnoki Tudományos Közlemények XVI. Szolnok, 2012.

[26] Prékopa András: Bolyai János forradalma, *Természet Világa,* 2002/július–szept., 48 oldal.

[27] Szemjon Grigorjevics Gingyikin: *Történetek fizikusokról és matematikusokról,* 2. jav. kiadás, TYPOTEX, 2004, 448 o. (Gauss visszafogottsága ebben le van írva.)

Varga János
mérnöktanár
`e-mail: vargaj@freemail.hu`

A PROBLÉMAMEGOLDÁS MEGISMERÉSÉNEK MAGYAR MÓDSZERE

NAGY GYULA

Bevezető

„Többet lát egy ország természeti szépségeiből az az utas, aki tapasztalt vezető kíséretében, korszerűen megválasztott ösvényeken bejárja néhány legérdekesebb vidékét, mint az, aki végignyargal minden szélesre taposott országútján."

Eötvös Loránd

A cikk a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok már több mint 120 éve működő két fő alkotó elemét: a tanév során zajló versenyeit és a folyóiratot, ezek aktuális fejlesztéseit, és legfőként gondolkodást, problémamegoldást fejlesztő küldetését mutatja be. A problémamegoldás fejlesztésében elért eredmények igazolásához hivatkozunk nemzetközileg elismert tudósaink eredményeire, néhányuk életművére, ezeket ismertnek tételezzük fel. Bemutatjuk az egyes alkotóelemek működését. Levonunk néhány következtetést az elmúlt néhány évben készítetett adatbázisok lekérdezése során kapott eredményekről. Általában kiváló problémamegoldók kerülnek ki a speciális osztályokból. Többnyire azért, mert tehetséges diákok járnak oda, és nem mellékesen azért, mert nagyon jól gondolkodó, a problémamegoldásban is sikeres tanárok tanítják őket. Természetesen más iskolákra is igaz lehet az előző állítás. A tehetség definíciója vitatott, nem célunk, hogy ezt itt meghatározzuk, szerintünk a következő Carl Seelig-nek 1952-ben írt Einstein idézettel lehet közelíteni e fogalmat a tudomány vonatkozásában: *Nem vagyok különösebben tehetséges, csak szenvedélyesen kíváncsi.*

Az, hogy hogyan válik egy diák jó problémamegoldóvá, összetett probléma, erre szeretnénk egy igazán gyümölcsöző utat mutatni. Matematikai, természettudományos, műszaki területről megkérdezve sikeres diákokat, végzett szakembereket, minek köszönhetik a sikereiket, az iskolák mellett a közép-európai gyökerekkel rendelkezők közül nagyon sokan megemlítik a KöMaL-t is. Mielőtt részletesen erre térnénk ki, szükséges megemlítenünk az Eötvös-, illetve Kürschák-versenyt, mert a középiskolás korúak matematika, fizika tudását, problémamegoldó készségét hagyományosan a legjobban ezek a versenyek mérik. E versenyeken viszont csak akkor lehet jól teljesíteni, ha valaki nagyon keményen dolgozik, ehhez a Lap adja a legszélesebb körű támogatást.

Történetileg is nagyon közel állnak egymáshoz.

Eötvös-, majd Kürschák-verseny és a Matematikai versenytételek

Talán a legismertebb problémagyűjtemény a több részletben és több kiadásban is megjelent Kürschák által írt könyv, amit Neukomm Gyula, Hajós György és Surányi János [Matematikai versenytételek] átdolgozott, folytatott, majd az utóbbi szerző tovább folytatott egészen az 1997. év versenyéig.

Ezeken a versenyeken korábban még ki nem tűzött három matematika, bizonyos években párhuzamosan futó versenyként három fizika feladatot lehetett megoldani. A versenybizottság mindig ügyelt arra, hogy a feladatok ötletesek legyenek, legfeljebb a középiskolai tananyaghoz tartozó ismereteket tartalmazzanak. Mivel a verseny egyetlen fordulóból áll, a három feladatnak alkalmasnak kell lennie arra, hogy kiválassza és rangsorolja az ország legjobb problémamegoldóit.

Megállapíthatjuk, hogy a kitűzött feladatok jól specifikáltak, nincsenek közöttük félreérthető, szinte hibátlanok. Egy kivételről beszámolok, különösen mert újabb eredményekkel gazdagította a matematikát. 1948-ban második feladatként tűzték ki következőt: *Igazoljuk, hogy egyetlen olyan poliéder létezik, amelynek nincs átlója (azaz bármely két csúcsát él köti össze), és ez a tetraéder.* Az állítás egyszerű poliéderre igaz, tehát olyanokra, amelyek topológiailag a gömbnek felelnek meg. A versenyen nem sikerült jó megoldást adni, de hamarosan Császár talált egy róla elnevezett ellenpéldát, amely topológiailag egy tórusznak felel meg. (Császár, 13 (1949–50)) (Gardner, 1975) A probléma nyomtatásban végül csak konvex poliéderre lett kitűzve, mert a bizottság valószínűleg eredendően is így akarta.

Gondolhatnánk, hogy a verseny nyertesei közül mindenki kutató lett, részletes leírás található (Radnai, 1994/11.) (Surányi, A 100-adik Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, 2004) munkákban az Eötvös- és Kürschák-versenyeken jól szereplő diákokról. Fentebb említettük, hogy a versenyen időszakonként fizikai problémákat is kitűztek, és egy idő után a két verseny szétvált. Mindössze három olyan diák volt, aki azonos évben egyszerre a legszínvonalasabb matematika- és fizikaversenyt megnyerte: Teller Ede, Bakos Tibor és Kós Géza. Tellert valószínűleg nem kell bemutatni, utóbbiaknak szerkesztőként nagyon sokat köszönhet a KöMaL.

Nem mindegyik kiváló matematikusunk volt eredményes versenyző. Annyit megjegyezhetünk, hogy egy verseny feltételei különbözőképpen befolyásolják a diákok aktuális problémamegoldó képességét, teljesítményét.

1962-ből származik a Kürschák-verseny következő feladata: *Bizonyítsuk be, hogy egy konvex n-szög átlói közül nem lehet n-nél többet úgy kiválasztani, hogy bármely kettőnek legyen közös pontja!* Az eredményhirdetésen a versenybizottság elnöke, Hajós a következő nagyon tömör, elegáns megoldást ismertette: *„A konvex n-szög alakja nem számít, feltehető tehát, hogy szabályos. Ebben az átlók iránya n-féle, legfeljebb ennyi tehát a páronként metszők száma is.”* (Fleiner, 2010). Bolyai János fogalmazta hasonló tömörséggel Abszolút Geometriáját az Appendix oldalain. Természetesen ez a tömör megoldás csak azon szakmabeliek számára érthető, akik a három közölt állítás közül mindegyiknek a megértéséhez szükséges előismeretekkel rendelkeznek. Még egy matematikusnak is nagyon át kell gondolnia az egyes tagmondatokat a megoldás megértéséhez, egy átlagos középiskolásnak ez reménytelen feladat lenne. Nem véletlen, hogy a feladatra adott három megoldás mindegyike jóval terjedelmesebb a Matematikai Versenytételek eredeti változatában.

„Naiv dolog lenne azt állítani, hogy én őt tanítottam … hetenként egyszer-kétszer összejöttünk Neumann-nal, teáztunk, matematikáról beszélgettünk, hogy milyen problémák léteznek a halmazelméletben, integrálelméletben és más témakörökben. Neumann pillanatok alatt felfogta a dolgok jelentőségét, s egy hét múlva már kész, saját eredményekkel állt elő."

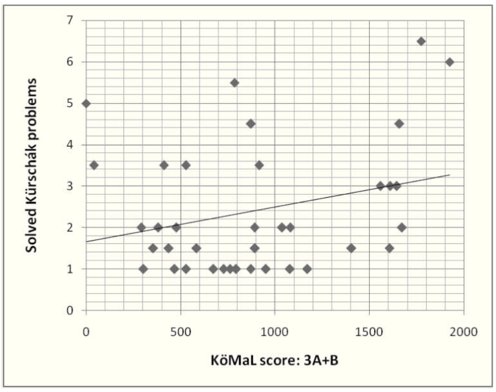
Szegő mondataiból kiderül, hogy Neumann tőle is kapott instrukciókat a lehetséges matematikai fejlődési irányok vonatkozásában. Sok tanár szeretne ilyen diákot, és természetesen sokan félnek is a túl okos diáktól; ez még Pólyával (Pólya, 1945) is előfordult: *„Ő volt az egyetlen diákom, akitől féltem. Nagyon gyors volt. Egy szemináriumot tartottam haladó diákok számára Zürichben, amelyen Neumann is részt vett. Egy bizonyos tételhez érve megjegyeztem, hogy ez még nem bizonyított, és lehet, hogy nehéz a bizonyítása. Neumann nem szólt egy szót sem, de öt perc múlva jelentkezett. Amikor felszólítottam, akkor a táblához ment, és felírta a bizonyítást. Ettől kezdve féltem tőle."* Mit tehet egy ilyen diákkal megáldott tanár? Hasznos elfoglaltságot kell találni.

Kell egy Grund

Ahol a lelkes fiatal kihívásokkal kerül szembe, ismereteihez illeszkedő problémákat old meg, hasonló képességekkel rendelkezőkkel verseng, és leginkább fejlődik, különösen a gondolkodásban. Egy a Pál utcaihoz hasonló intézményre, esetünkben egy Lapra és annak szellemi erejére tud támaszkodni. Hogyan tudjuk segíteni a problémamegoldó gondolkodást? Milyenek a megfelelő problémák? A tapasztalt mesterek válasza egyszerű: olyan nehézségű feladatokat kell találnunk számára, amelyet a tanuló még éppen meg tud oldani. A mester dolga, hogy ilyet mutasson. Ha nincs megfelelő mester (és egy idő után már nem lesz, mert a jó tanítvány túlszárnyalja mesterét), akkor, és persze már korábban is sok problémát kell megoldani, amik között biztosan lesznek olyanok is, amelyek segítenek gondolkodásunk fejlesztésében, mert elegendően nehezek, és mégis megoldhatók. Így gazdagodunk a megoldási módszerekben, gondolkodási sémáink száma nő, bonyolultságuk, összetettségük szintén, a sémák száma persze véges. (Mérő, 2002). Egy idő után ezek a sémák gondolati képekké, mechanizmusokká állnak össze (Hadamard, 1996), amelyek segítenek bennünket a kitűzött feladatok megoldásában.

A megfelelő problémák felkínálásában kivételes szerepet jut a KöMaL-nak. Három bizottsága huszonnégy, az oktatás, kutatás iránt elkötelezett egyetemi, középiskolai oktatóból áll. Ők küldik a kitűzendő feladatok zömét. Olvasóink havonta közel 10 feladatot küldenek be. A feladatok kiválasztása, specifikálása a megfelelő bizottság feladata. Így versenyzőink számára a kihívást jelentő feladatot nem egyetlen ember, hanem egy szakértőkből álló csapat állítja elő.

Tekintsük a következő táblázatot, amely azt mutatja, hogy a Lapban kitűzött feladatok megoldásának eredményessége mennyiben segíti a korábbi fejezetben ismertetett Kürschák-versenyen az eredményes részvételt. Azt mérjük tehát, hogy aki folyamatosan dolgozik a lapban, az mennyire eredményes a legszínvonalasabb matematika versenyünkön. A táblázat az utóbbi 5 év Kürschák-versenyeinek első 10 helyezettjei által megoldott feladatokért kapott pontok számát ábrázolja a KöMaL pontversenyében szerzett pontok függvényében. A vízszintes tengelyen a Lap A és B pontversenyében több éven keresztül megoldott feladatokért szerzett pontok számát úgy állapítottuk meg, hogy a nehezebb A feladatokért kapott pontokat háromszoros súllyal vettük, mert a megoldásuk legalább ekkora energia- és időráfordítást igényel, természetesen, akkor, ha a versenyző egyáltalán képes a feladat megoldására. A grafikonon látható trendvonal bizonyos értelemben mutatja a KöMaL pontversenyének eredményességét. A vízszintes tengely közepén 1000 pont kb. azonos mennyiségű munkaórának felel meg, ez a trendvonalat tekintve 2,5 Kürschák-feladat megoldásának felel meg.



A három feladatnál többet teljesítők legalább két versenyen is részt vettek, a 6,5 pontot elért versenyző 3 versenyen is részt vett. A grafikon bal szélén levő ponthoz tartozó versenyző két alkalommal is eredményesen szerepelt a Kürschák-versenyen, annak ellenére, hogy a Lap matematikaversenyében nem vett részt, ám a fizikaversennyel ő is próbálkozott. Megkérdeztük, miért nem csinálta a KöMaL-t. Természetesen oldott meg nehéz A feladatokat, csak éppen nem küldte be a megoldásokat. A versenyzők ezt a mozzanatot, és a feladatat leírását szeretik a legkevésbé. Az eredményes Kürschák-szerepléshez természetesen nem elegendő csak a KöMaL pontversenyében való eredményes részvétel, hiszen ahhoz egyéb összetevők is kellenek, mint azt a bevezető fejezetben már említettük. Nem említettük viszont Pósa Lajost, a MaMuT-ot, valamint az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskolát, amelyekben tábori körülmények között folyik nagyon színvonalas tehetséggondozás, e cikkben e táborok munkájára nem térünk ki.

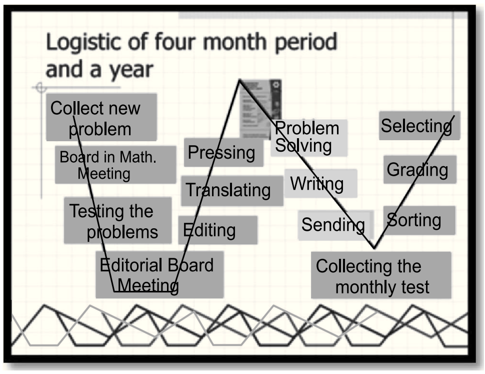
A KöMaL nagyon rövid története

1893–1896: Arany Dániel mutatványszámot jelentett meg decemberben, és szerkeszti a sikeres, bár financiális gondokkal küzdő Lapot.

1896–1914: Rátz László a Fasori Gimnázium tanára lesz a lap kiadója és szerkesztője is egyben. Legsikeresebb tanítványai Neumann és Wigner nem szerepelnek a megoldók között, mert a Lap az I. világháború alatt nem jelent meg, azonban Rátz oktatása során nyilván használta a lapban korábban megjelent feladatokat, hiszen azokat feladatgyűjteményben is megjelentette. Rátz Lapokkal kapcsolatos tevékenységére szeretnénk felhívni az olvasóink figyelmét, ezért idézünk Mikola Sándor beszédéből, amely a Fasori Gimnázium értesítőjében jelent meg. *„... A mathematikai tanítás reformjánál is mélyebb az a hatás, melyet Rátz László a Középiskolai Mathematikai Lapok révén az ország mathematikai tanítására kifejtett. 20 éven át szerkesztette e lapot. Teljesen önzetlenül csinálta, sem állami, sem másféle segítséget sehonnan sem kapott (de nem is kért), sőt a lap kiadására tetemes összegeket is áldozott. A legnagyobb gonddal válogatta meg a kis folyóirat cikkeit és feladatait, hogy a tanulókban a mathematikai problémák iránt való érdeklődést fölkeltse és az igazi mathematikai gondolkozási mód magvait elhintse. Még nagyobb gonddal és lelkiismeretséggel olvasta át és bírálta meg az ország minden részéből beérkező megoldásokat. Nagy éleslátással mindenkor fel tudta ismerni az igazi tehetségeket, úgyhogy méltán dicsekedhetnék azzal, hogy mindazok, akik az egyetemeken és a főiskolákon mint kiváló mathematikusok kitűntek, majdnem kivétel nélkül az ő lapjának szűkebb gárdájából kerültek ki ...”* A pontversenyben más tudományok jeles képviselői is kiváló eredményeket értek el, közülük Kármán Tódor (1881–1963) és Harsányi János (1920–2000) nevét feltétlenül meg kell említenünk.

1925–1939: Utóbbi már az első világháborút követő zűrzavar után versenyzett a Faragó Andor által újraindított és szerkesztett folyóiratban. A lap céljának a matematikai gondolkodás fejlesztését, a természeti ismeretek gyarapítását tartotta. Erre az időszakra esik nagyon sok kiváló matematikusunk KöMaL-os karrierje. A legismertebb nevek: Turán Pál (1910–1976), Hajós György (1912–1972), Erdős Pál (1913–1996) és Rényi Alfréd (1921–1970). Arany Dániel az alapító, Faragó Andor és a Lap is a második világháború és a zsidóüldözés áldozatai lettek.

A második világháború után dr. Soós Paula szegedi matematika-tanárnő fiatal tanár kollégája, Surányi János segítségével elindította a saját terjesztésű stencilezett Szegedi Íveket, amellyel a Középiskolai Matematikai Lapok harmadszorra is újra indult. Céljukat így fogalmazták meg: *„A középiskolai matematikai képzés kiegészítésére szerkesztjük a lapot, az átlag érdeklődésű tanulóknak kellemes élményt szerezni. Az összefüggések felismerésében erősíteni őket, valamint a megoldások közlésével gondolataik világos, szabatos kifejezését segíteni.”* Ma sem kívánhatunk e céloknál nemesebbeket. E gondolatokat szem előtt tartva a korábbi években Surányi János irányító munkáját segítette, illetve folytatta Neukomm Gyula, Bakos Tibor, Bodó Zalán, Kunfalvi Rezső, Szőkefalvi-Nagy Ágnes, Tusnády Gábor, Fried Ervinné, Csirmaz László, Pataki János, Lugosi Erzsébet, Oláh Vera. Nehéz lenne kiemelni a II. világháború utáni megoldók közül néhányat, hiszen matematikusaink és fizikusaink majdnem mindegyike résztvevője volt a pontversenynek. Ezt támasztja alá Staar Gyula Matematikusok és teremtett világuk című könyve, valamint a Róka Sándor szerkesztésében megjelent *Miért lettem matematikus* című gyűjtemény.



Rátz idejében a Lap megoldóinak létszáma elérte a 200-at, a jelenlegi létszám ennél egy nagyságrenddel nagyobb. A versennyel, illetve a szerkesztéssel járó adminisztráció szemléltetésére lássuk a következő ábrát.

Az angol nyelvű dia alján a különböző színű görbék mutatják, hogy kilenc versenyt rendezünk egyetlen év alatt úgy, hogy bizonyos időszakokban, az átfedések miatt párhuzamosan négy versennyel kell foglalkoznunk. *„Ezért teljesen érthető miért lehetett könnyen átültetni a Kürschák-versenyt, amíg a KöMaL magyar specialitás maradt."* mondta Berzsenyi György, aki több tehetséggondozó versenyt honosított meg az Egyesült Államokban.

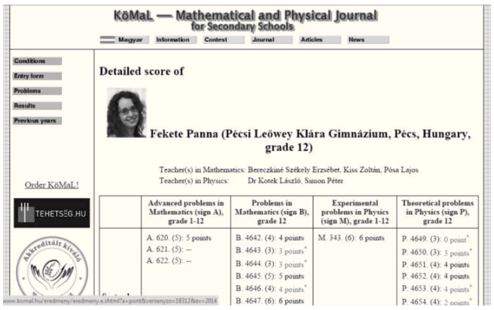
A KöMaL pontversenyei

Lapunkban matematika, fizika és folyamatosan már 15 éve számítástechnika verseny is található. A matematikabizottságot Hermann Péter, a fizikabizottságot Radnai Gyula vezeti, a lap fizika részét Gnädig Péter szerkeszti, a számítástechnika rovatot Schmieder László felügyeli.

A bizottságok és a szerkesztők munkája jól követhető az ábrán. A versenyzőknek közel egy hónap áll rendelkezésükre, hogy megoldják a feladatokat. A megoldások nagy része már elektronikusan érkezik a szerkesztőségbe. A sikeres versenyzéshez nem kell minden példát megoldani. Nagy kitartás kell a rendszeres munkához. Egyetemi hallgatók szortírozzák, javítják, értékelik a feladatokat, a szerkesztők átnézik a javítást. A beküldött feladatok megoldásai alapján mintamegoldást írnak a lapba. A legjobbak nevét megjelentetjük a feladat megoldásánál. Az eredmények havonta automatikusan összegződnek, és mindenki megtekintheti a KöMaL `http://www.komal.hu` honlapján a nevéhez tartozó oldalon az addig összegyűlt pontjait, pillanatnyi helyezését tantárgyanként és kategóriánként is – hiszen vannak olyan versenyzők, akik mindhárom tantárgyból küldenek be feladatokat.

A jó helyezést elértek fényképét a lapban megjelentetjük, és jutalmazzuk őket. A díjak átadása ünnepélyes keretek között a kétnapos Ifjúsági Ankétunkon történik. Az ankét előadói között akadémikusok, egyetemi és középiskolai tanárok, valamint a tudomány más jeles képviselői is megtalálhatók. A verseny országosan elterjedt. Versenyzőink az ország több mint száz településének, több mint kétszáz középiskolájából küldtek be megoldásokat. A nemzetközi diákolimpiák résztvevői a legjobb helyeken szerepelnek a pontversenyünkben. Több mint húsz határon túli városból voltak megoldóink, angolul is kapunk megoldásokat. Megnyugtató érzés, hogy az otthon elkészített megoldások alapján zajló egész éves versenyünk eredménye egybecseng a zárt helyen zajló néhány órás versenyek eredményeivel, például a Kürschák-verseny, vagy az Eötvös-verseny eredményével.

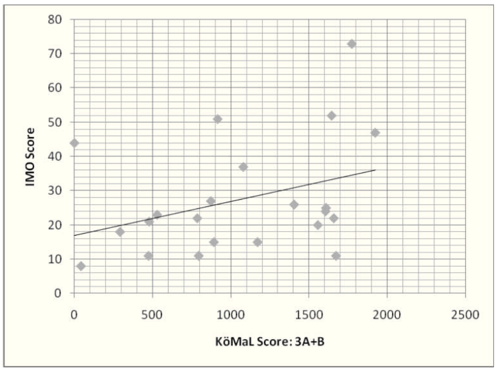
A lap megjelenését és a széles körű jutalmazást részben a Matfund Alapítványon keresztül az Oktatási Minisztérium, az Ericsson Magyarország Rt., az Europrofil Kft., a Neumann János Számítógép-tudományi Társaság, a Metropolis Alapítvány (USA), valamint magánszemélyek személyi jövedelemadójuk 1%-ával is támogatják. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem támogatása szellemieken kívül természetben is megnyilvánul: az irodánk és esetenként előadótermek biztosításával.



Pelikán József, a magyar IMO csapat vezetője így emlékezik: *„… Hetedikben aztán beneveztem és néhány megoldást beküldtem … sokkal jobban szerettem – édesapám bánatára – focizni, mint megoldásokat körmölgetni … Változást csak az hozott, mikor először megláttam a nevem nyomtatásban, hirtelen eleven valóság lett: van értelme dolgozni, van visszajelzés … Rengeteget tanultunk egymástól és erős (de mindig baráti) versengés indult meg, pl. KöMaL megoldások ügyében, többek közt Lovász Lászlóval … Közben nagyon keményen dolgoztam. Délben hazamentem az iskolából és gyors ebéd után nekiültem matematikát csinálni estig – ez ment napról-napra, hétről-hétre, hónapról-hónapra. Így megtörtént a csoda: már elsős (9. osztály) korunkban kijutottunk (Lovász és én) a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára … ”* (Pelikán & Lovász, 1993/December).

A visszajelzést sikerült felgyorsítanunk: az értékelést követően a pontszám azonnal megjelenik a versenyző eredményei között, és azt bárki megtekintheti, amennyiben a versenyző nem korlátozta ezt a lehetőséget.

Érdemes összehasonlítanunk a pontversenyünkben elért eredményeket az IMO csapatunk eredményeivel. A táblázat az utóbbi 5 év IMO eredményeit ábrázolja a KöMaL pontversenyében szerzett pontok függvényében. A vízszintes tengelyen a Lap A és B pontversenyében több éven keresztül megoldott feladatokért szerzett pontok számát szintén úgy állapítottuk meg, hogy a nehezebb A feladatokért kapott pontokat háromszoros súllyal vettük. A grafikonon látható trendvonal az előzőnél szignifikánsabb és ez esetben is jól mutatja a KöMaL pontversenyének eredményességét. A vízszintes tengely közepén 1000 pont kb. azonos mennyiségű munkaórának felel meg, ez a trendvonalat tekintve 27-28 pontnak felel meg, ami általában nagyon közel esik az aranyérem alsó határához.



A 42 pontnál többet teljesítők legalább két versenyen is részt vettek. Az eredményes IMO szerepléshez természetesen nem elegendő csak a KöMaL pontversenyében való eredményes részvétel, hiszen ahhoz néhány jó tanár és egyéb összetevők is kellenek, mint azt a bevezető fejezetben már említettük.

Elmondhatjuk a két grafikon ismeretében, hogy a kiugró teljesítmények eléréséhez tehetséggel megáldott diákjainknak is komoly áldozatokra van szükségük. Ezt természetesen eddig is tudtuk, most viszont már azt is tudjuk, hogy van olyan médium, amelyik partner ebben a munkában. A pontverseny egyes évfolyamán megoldott 60-120, különleges esetekben még ennél is több feladat megtanít bennünket a problémamegoldó gondolkodás képességére, és ezzel bármikor használható, értékes tudásra teszünk szert, amely a versenyek elmúltával is különleges eredményeket generálnak. Talán a legjobb tanács, amit minden problémamegoldónak tudnia kell szintén Pólyától származik: „Ha egy problémával nem boldogulsz, keress egy egyszerűbbet, amit meg tudsz oldani."

Versenyünk és Lapunk fő támogatói a MATFUND alapítványon keresztül segítik munkánkat. Egyéni támogatóink és azok akik a támogatások megszerzésében segítettek többnyire korábbi legjobb megoldóink közül kerülnek ki: Bor Zsolt, Császár Ákos, Dobos Krisztina, Bollobás Béla, Fodor István, Friedler Ferenc, Földes Tamás, Knuth Ábel, Laczkó László, Lovász László, Pálinkás József, Vicsek Tamás. A lap megjelenését és a széles körű jutalmazást az Oktatási kormányzat, az Ericsson Magyarország Rt., valamint magánszemélyek személyi jövedelemadójuk 1%-ával is támogatják. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem támogatása szellemieken kívül természetben is megnyilvánul: az irodánk és esetenként előadótermek biztosításával.

A Lap

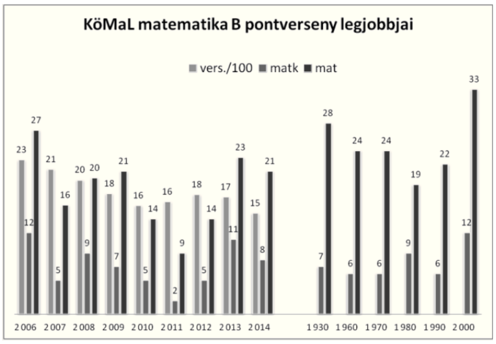
A cikkek válogatásánál, szerkesztésénél Leibniz gondolatait szeretnénk követni, hiszen középiskolások számára érthető, élvezhető publikációt szeretnénk megjelentetni: *„... Úgy írtam, hogy az olvasó mindig észrevehesse a tanultak belső indítékait, sőt lássa a felfedezés forrásait, és úgy érthessen meg mindent, mintha azt saját maga fedezte volna fel ...”.* Próbáljuk ábrákkal, képekkel érthetőbbé tenni közlendőinket, szemléletessé tenni a megoldások, bizonyítások gondolatmenetét. Még középiskolás korában megjelent egy cikk Erdőstől a magasabb rendű számtani sorozatokról. Ebben a definíció, a differenciák közötti összefüggések tisztázása után, ti. hogy a differenciák az eggyel alacsonyabb rendű differenciák különbségei, majd a köbszámok szerepelnek numerikus példaként, és a következő általános felírásból fogalmaz sejtést, majd teljes indukcióval bizonyít.

Erdősnek későbbi cikkei is jelentek meg a lapban, ezekben olyan problémáit publikálta, amelyek különösen alkalmasak arra, hogy megragadják fiatal tehetségek figyelmét, mert e problémák természetesek, könnyen érthetők, mégis megoldatlanok. Egy ilyen cikkről beszél Lovász nagy elragadtatással: *„... Az egyik első számban, ami kezembe került, Erdős Pálnak volt egy cikke kombinatorikus geometriáról. Nagyon meglepett, és föl is lelkesített, hogy meg tudom érteni, amin nagy matematikusok gondolkodnak, és hogy milyen sok szép, nehéz, megoldatlan kérdést lát az ember, ha egy kicsit körülnéz, még egy olyan klasszikus területen is, mint a geometria. A cikket legalább hússzor végigolvastam ...”* (Pelikán J. L., 1993/December).

A számítógépes háttér, valamint a KöMaL honlap megteremtése Kós Géza munkája. A honlap karbantartása mellett sok egyéb, informatikához kapcsolódó feladatunk is van: e-mailen kapott megoldások nyomtatása; a versenyzők pontjainak adatbázisban történő rögzítése; a napi levelezés intézése; az egyes számok tördelése, a legújabb szám részleges nyomdai előkészítése; feladatok és cikkek ellenőrzése az archívumban, hogy nem jelent-e meg korábban hasonló a Lapban; az archívum állandó frissítése. A KöMaL egyes számainak archívuma, megtalálható honlapunkon. Az archívum több mint harmincötezer oldalt tartalmaz, lehet benne keresni időrend, téma, illetve a lapban megjelent nevek (szerzők, megoldók) szerint. A feladatokon és cikkeken kívül évtizedekre visszamenőleg nyomon követhetők a magyar matematika, fizika és számítástechnika oktatásában nagy szerepet játszó országos és nemzetközi versenyek. E versenyek közül a legrangosabbak bemutatására `http://www.versenyvizsga.hu` oldalt fejlesztettük. Ebben olyan „feladatbázist” hoztunk létre, amelyben talán először a képletekre is lehet keresni. Szeretnénk, ha a több mint százéves anyag minél nagyobb része teljesen kereshető lenne, és elkészülne az összes feladat és megoldás angol fordítása is. A KöMaL archívum legszebb ékkövei a megoldók fényképei, célunk, hogy ezek minél jobb minőségben, hiánytalanul felkerüljenek honlapunkra.

A teljesség igénye nélkül szeretnénk megemlíteni munkatársainkat, akik a szerkesztői feladatokon felül is sokat tesznek azért, hogy a lap a mai tartalmában és formájában megjelenhessen: Gnädig Péter, Herman Péter, Kós Géza, Kulcsár Cecília, Miklós Ildikó, Ratkó Éva, Oláh Vera, Trásy Jolán.

A Fórumunk 211 témája közül az egyik leglátogatottabb a „A valaki mondja meg!" 1994 bejegyzéssel, és talán a leghasznosabb a „TEX – avagy tanuljunk szépen írni", amely TEX tanulásának támogatására készült, egy nagyon jól használható gyakorló pálya. A munkafüzet felületet azért hoztuk létre, hogy bejelentkezve a versenyző kiválasztja a megoldani kívánt feladatot, és már írhatja is a megoldását, akár TEX-ben is. Nagyon fontos, hogy a versenyzők minél korábban tanulják meg a publikálás szabályait, pontosan tanulják meg leírni gondolataikat, a leírás terjedjen ki minden részletre, és mégis maradjon tömör és érthető. Katona frappánsan fogalmazta meg a publikációs kényszer, illetve a tudománymetria lényegét egy rádióműsorban: *„Nem elég okosnak lenni, annak is kell látszani! ... Elsősorban tanítványaimnak szoktam mondani, hogy nem elég az, hogyha nagyon okosakat kitalálnak, hanem azt el is kell adni. Szépen le kell írni ...".*



A következő táblázatban az utóbbi években versenyzők létszámát ábrázoltuk, illetve matk-val jelöltük a KöMaL 11. osztályosok B versenyében a kiválóan teljesítőket (a megszerezhető pontszám legalább 80%-át érték el). A jól teljesítőket mat-tal jelöltük (a megszerezhető pontszám legalább 50%-át érték el, tartalmazza a matk csoportot is). A grafikon jobb oldalán a korábbi évek eredményeit ábrázoltuk, ezekhez az évekhez teljes versenyzői létszám megjelenítése további munkát igényel. Itt szeretném megköszönni Makay Géza és Mészáros Gergely kollégáinknak az adatok megkeresésében nyújtott segítségét.

A grafikonból leolvasható, hogy a Lap pontversenyében jól teljesítők száma 20 fő körül van, a kiválóan teljesítők száma pedig mindössze 8 fő körüli és volt is, ezek a számok ugyan évente változnak, de nem számottevően. A versenyzői létszám az utóbbi 15 év során közel felére csökkent, a korfa ekkora csökkenést nem mutat, és a középiskolások száma sem csökkent ez idő alatt, így további kutatás szükséges az okok, illetve a lehetséges következmények feltárására.

„Munkánkkal nem kizárólag a pozitív eredményeket hajszoljuk, amint a laikusok feltételezik, mert fáradozásaink célja ezenkívül az is, hogy ezen esztétikai érzelem hatása alá kerüljünk, s másokat is ezen hatás alá vonjunk." Talán az idézett Poincaré gondolat foglalja össze legjobban a Csíkszentmihályi (Csikszentmihályi, 1986) által nevesített flow élményt, amely matematika művelése során leghatásosabban valószínűleg a Heuréka átélését nyújtja. Ez az érzés, amely egy alkotó matemati-

kust a teremtés állapotába repít, és amelyet Bolyai apjának írt levelében nagyon tömören így fogalmaz meg: *„Semmiből egy új, más világot teremtettem.”*

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok a magyar matematika, fizika és számítástechnika tudománytörténetének része, megalapozta a magyar természettudományok külföldi megbecsülését azzal, hogy világhírű tudósokat nevelt. Célunk továbbra is az, hogy diákjaink figyelmét a problémamegoldó gondolkodás felé irányítsuk, rendszeres munkájuk révén felkészüljenek arra, hogy gondolataikat pontosan tudják leírni, és nem utolsósorban a feladatmegoldás intellektuális örömét szeretnénk nyújtani. Megelégedéssel töltene el mindnyájunkat, ha a hagyományokhoz híven tudnánk tovább működtetni lapunkat, ehhez javaslatot, segítséget szívesen fogadunk.

Bollobást idézve zárjuk Lapunk tehetséggondozást segítő küldetésének bemutatását: *„Az emberiség háborúi során soha nem tartoztak köszönettel ily sokan ilyen keveseknek”* – mondta Churchill a Királyi Légierőről. Hasonló elismerést érdemel a Középiskolai Matematikai Lapok. Soha a matematika történetében nem köszönhettek ilyen sokan, ilyen sokat, ilyen kis folyóiratnak.

Irodalom

[1] A budapesti Ág. Hitv. Evang. Főgimnázium értesítője az 1925/26. iskolai évről, közzéteszi: Dr. Hittrich Ödön igazgató, Budapest, 1926.

[2] D. J. Albers and G. L. Alexanderson, *Mathematical People,* Birkhauser, Boston (1985). Interview with P. Erdős, 81-91; interview with P. Halmos, 120–132; interview with G. Pólya, 246–253.

[3] J. Bolyai, Appendix: *The theory of space,* Introduction by F. Kárteszi; supplement by B. Szénássy, Akadémiai Kiadó, Budapest (1987).

[4] Császár, Á.: *A polyhedron without diagonals,* Acta Sci. Math., **13** (1949–50), pp. 140–142.

[5] Csikszentmihályi, M. and Robinson, R. E., *Culture, time, and the development of talent in Conceptions of Giftedness* (R. J. Sternberg and J. E. Davidson, eds., Cambridge University Press, Cambridge (1986).

[6] Dobos Krisztina, Gazda István és Kovács László, *A fasori csoda,* Országos Pedagógiai Könyvtár és Múzeum, Budapest, 2002.

[7] Fleiner Tibor, *Kürschák Verseny,* in: Ács Katalin, Kosztolányi József, Lajos Józsefné, Csordás Mihály, Nagy Tibor (editors): Cserepek a magyarországi matematikai tehetséggondozó műhelyekből. Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 2010; pp. 28–32.

[8] Gardner, M., *Mathematical Games.* On the remarkable Császár polyhedron and its applications in problem solving, Scientific American 232, 5 (1975), 102–107.

[9] Hersh, Reuben John-Steiner, Vera, *A Visit to Hungarian Mathematics,* The Mathematical Intelligencer Volume 15, (2) (1993), pp. 13–26.

[10] Hayden, Erika Check: *Root of maths genius sought,* Nature, **502** (2013), 602–603.

[11] Hewitt, J. K., *Editorial policy on candidate gene association and candidate gene-by-environment interaction studies of complex traits,* Behav. Genet., **42** (2012), 1–2.

[12] *Hungarian Problem Book IV,* Robert Barrington Leigh, Andy Liu (editors).

[13] Hadamard, Jacques: *The Mathematician's Mind: The Psychology of Invention in the Mathematical Field* (Princeton, 1996).

[14] *Középiskolai Matematikai Lapok* (1984), Nos. 8, 9, 10.

[15] Kovács, László: *Teacher László Rátz,* in: Némethné Pap Kornélia, Rátz László tanár úr, Studia Physica Savariensia XIII, 68–73.

[16] Kovács, László: *Neumann János és magyar tanárai,* Természet Világa, 2003. III. különszám, 36–42, 2003.

[17] Kovács, László: *László Rátz and John von Neumann,* Faculty of Education, University of Manitoba, Winnipeg, Ca, 2003. ISBN 09695481 5x.

[18] G. W. von Leibniz: *Mathematische Schriften,* Gerhardt, VII. 9.

[19] László, Mérő: *Habits of Mind: The Power and Limits of Rational Thought* (February, 2002).

[20] Nagy Gyula: *Tudományok katalizátora, a KöMaL.* (in Hungarian): Magyar Tudomány, 2003/11, p. 1455. (`http://www.matud.iif.hu/03nov/016.html`)

[21] Nagy Gyula: *KöMaL,* in: Ács Katalin, Kosztolányi József, Lajos Józsefné, Csordás Mihály, Nagy Tibor (editors): Cserepek a magyarországi matematikai tehetséggondozó műhelyekből. Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 2010; pp. 158–165.

[22] Némethné Pap Kornélia: *Rátz László tanár úr,* Studia Physica Savariensia, XIII. (Berzsenyi Dániel Főiskola Fizikai Tanszéke, Szombathely, 2006).

[23] Pelikán József, Lovász László: *Ketten a „Fazekas” első matematika tagozatos osztályából,* Középiskolai Matematikai Lapok, 1993. December.

[24] Péter Rózsa: *200 years of teaching mathematics at the Technical University of Budapest,* Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech., **25 (6)** (1994), 805–809.

[25] György Pólya: *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method.* Princeton University Press, 1945.

[26] Radnai Gyula: *Az Eötvös verseny centenáriumán. Tények, képek, gondolatok,* Fizikai Szemle 1994/11. 421. o.

[27] Staar Gyula: *A megélt matematika – Beszélgetések,* Budapest, Gondolat Kiadó, 1990.

[28] Surányi János: *A 100-adik Kürschák József Matematikai Tanulóverseny.* Matematika Oktatási Portál, 2004. `http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/adatbazis/Kurschak_Jozsef_verseny.html`

[29] Szabó P. G.: *Neumann János életútja és munkássága,* Pi-Matematikai folyóirat, Miskolci Egyetem I/II. (2002/2003), pp. 1–13.

[30] Tettamanti E., *The Teaching of Mathematics in Hungary.* National Institute of Education, Budapest (1988).

[31] Turán, P., *The Fiftieth Anniversary of Pál Erdős,* Matematikai Lapok, **14** (1963), 1–28 (Hungarian). English trans. Pp. 1493–1516 of [73].

[32] Turner, J. C., Meyer, D. K., Cox, K. E., Logan, C., DiCintio, M., Thomas, C. T. (1998): *Creating contexts for involvement in mathematics,* Journal of Educational Psychology, Vol. 90, 730–745.

[33] A. A. Wieschenberg, *The Birth of the Eötvös Competition,* The College Mathematics Journal, **21, 4** (1990), 286–293.

[34] `http://db.komal.hu/scan/`

[35] http://mek.oszk.hu/05900/05922/html/gmeotvosl0003.html

[36] http://www.komal.hu/verseny/verseny.e.shtml

[37] http://www.komal.hu/lap/archivum.e.shtml

Nagy Gyula
SZIE Ybl Miklós ÉTK
nagy.gyula@ybl.szie.hu

A PUBLIKÁCIÓK ETIKÁJÁRÓL

KATONA GYULA

Sok évvel ezelőtt írtam egy cikket a Magyar Tudományban *Közös cikkek etikája* címmel. (Új folyam XXXIV. kötet 1. szám, 1989. január.) Azt hiszem máig sem avult el, habár sok mindent hozzá lehet tenni. Mivel a két folyóirat olvasóközönsége különböző, éredemesnek látszik a régi cikket a Matematikai Lapokban újra leközölni. Az apropó az, hogy Kollár István az idén írt egy fontos cikket, ismét a Magyar Tudományban a plágiumról (Plágium, vagy mások eredményeinek összefoglalása, 2016/1). A két cikk témái különböznek. Csak annyi közös bennük, hogy a publikációk etikájáról szólnak. A két cikk újraközlésével azt szeretnénk elérni, hogy vitát generáljunk a nem mindig egyértelmű kérdésekről.

A plágiumnak vannak nyilvánvaló esetei. Valaki egyszer leadott egy cikket, ami – mint a lektor észrevette – egy külföldön megjelent cikk szó szerinti magyar fordítása volt. (Arra való hivatkozás nélkül.) A szerző utólag azt állította, hogy ő azt áttekintő cikknek szánta, csak a szerkesztőségnél maradt le az erre vonatkozó megjegyzés. Egy másik nyilvánvaló eset volt, amikor valaki a témavezetőjével közösen írt cikk egyes eredményeit később újra megírta egyedül, anélkül, hogy az világos lett volna, hogy az eredmény honnan származik.

De vannak a plágiumnak kevésbé nyilvánvaló, sőt vitára alkalmas esetei is. Nemrég például egy doktori értekezés bírálója kifogásolta, hogy a szerző saját tételeinél nem hivatkozott pontosan saját megjelent cikkeire. A másik – Kollár cikkében is érintett – kérdés, amikor a szerző többször megírja ugyanazokat az eredményeket. Például összefoglaló-áttekintő cikk formájában. Ezt én megengedőbben fogom fel. A jó áttekintő cikkek előreviszik a tudományt. Ha szerző pontosan hivatkozik saját (és mások) eredményeire, akkor csak annyi (jogtalan?) előnye származik, hogy cikkei száma jobban nő, mint eredményeié.

Mindenesetre azt ajánlom fiatal kollegáimnak, hogy mindent részletesen és pontosan idézzenek. Egy mulatságos példa saját múltamból. Egyszer egy nyitott kérdést sikerült megoldanom. A megoldást ismertető cikkben leírtam, hogyan, kiken keresztül jutott el hozzám a kérdés. Utólag kiderült, hogy az eredményt már 10 évvel korábban publikálta valaki (kissé más alakban). Kellemetlen volt, de a túlzottnak látszó hivatkozás igazolta, hogy mennyire nem ismerték mások se az eredményt.

Végül, hadd tegyek hozzá valamit az alább újraközölt cikkem témájához. E-mailt kaptam egy iráni matematikustól, akit egyszer láttam életemben egy konferencián, hogy a mellékelt (kész!) cikkének legyek társszerzője. Tehát nem várt el tőlem munkát, csak azt, hogy járuljak hozzá, hogy a nevemet ráírja a cikkére.

Nem írta le, de úgy gondolta, hogy neki jó az, ha a „nagy öreg"-gel (ebben persze tévedett) közös cikke lesz, nekem meg az a jó, ha eggyel nő a publikációs listám. Természetesen nemet mondtam, és kíváncsian várom, hogy milyen szerzők neve alatt fog a cikk megjelenni. Több hasonló – bár nem ennyire „pofátlan" – kísérletet tapasztaltam. Félek, hogy ez a módszer terjedni fog.

PLÁGIUM VAGY MÁSOK EREDMÉNYEINEK ÖSSZEFOGLALÁSA?* EGY KUTATÓ TŰNŐDÉSEI

KOLLÁR ISTVÁN

Ha plágiumról beszélünk, mindegyikünk fejében ott gomolyog egy homályos rossz érzés: ez helytelen, és figyelni kell rá, hogy elkerüljük. Az ezen való őrködés és az ennek helyes kezelésére való megtanítás szokásosan az oktató, illetve a szerkesztő feladata. De pontosan mi is a plágium? Valóban egyértelmű-e, és megítélhető-e?

Példaként egy amerikai alkotmánybíró, Potter Stewart híres véleményét idézném, melyet arról adott, hogy egy adott film pornográf-e: „Most nem definiálom pontosabban azokat a tételeket, melyekről azt gondolom, hogy ennek a leírásnak megfelelnek [kemény pornográfia], és talán nem is sikerülne értelmesen megtennem. De *tudom, hogy az-e, amikor látom,* és a film, amelyről itt szó van, nem az.”[1]

Nagyon bölcs megállapítás. Ténylegesen létezik jóízlés, és létezik belső megérzés. Sajnos azonban ez azt is jelenti, hogy sok eset egyedi mérlegelés kérdése, és erre nem lehet jogot építeni. Ha a bíráló is és a szerző is egyetért abban, hogy valami plágium, akkor kijavítják. Ám ha ebben véleményeltérés van, akkor nincsen egyértelmű definíció. Vagy mégis?

Az interneten sok definíciót találunk, például:

„Plágium: szellemi tolvajlás, más művének közlése saját név alatt, a mű alapgondolatának vagy részleteinek felhasználása a szerzőre való hivatkozás nélkül.” (*Magyar Értelmező Szótár*)

„Plágiumnak vagy plagizálásnak nevezik azt a cselekedetet, ha valaki egy másik ember (az eredeti szerző) munkáját saját publikált munkájában hivatkozás, forrásmegjelölés és/vagy szerzői engedély nélkül felhasználja, azt sajátjaként tünteti fel, és ezzel az eredeti szerző jogait sérti.” (*Wikipédia*)

„Plágium a mások ötleteinek, tudományos eredményeinek, szavainak, szövegeinek átvétele és sajátként való feltüntetése.” (*az MTA Etikai kódexe*[2])

---

*A 2015. május 21-én tartott MTA „Plágium” konferencia előadásának szerkesztett szövege. A Magyar Tudomány 2016/1-es számában megjelent cikk – a szerkesztőség engedélyével történő – másodközlése.

[1] „I shall not today attempt further to define the kinds of material I understand to be embraced within that shorthand description [„hard-core pornography”], and perhaps I could never succeed in intelligibly doing so. But *I know it when I see it,* and the motion picture involved in this case is not that.” (Potter Stewart, 1964, [1])

[2] `http://mta.hu/cikkek/tudomanyetikai-kodex-122151`.

Már ezen definíciók között is van különbség, nem is kicsi. Az elsőben ott áll:

– a szerzőre való hivatkozás hiánya,

másodikban megjelenik

– a szerzői engedély hiánya (legalábbis vagylagosan),
– az eredeti szerző jogainak sérelme,

azután más definíciókban még feltűnőbb az

– anyagi kár (vagy elmaradt haszon).

Mennyire használhatók a fenti szempontok kritériumként annak eldöntésére, hogy valami plágium-e? Mert ezek a szempontok aránylag világosan eldönthetők.

Példák

a) Az egyetemi hallgató szakdolgozatot ír. Egy társa már elkészített egy hasonló témájú dolgozatot, és felajánlja neki, hogy a kész szövegből használjon fel, amit akar.
Mindannyian felszisszenünk. Pontosan ez az, amit el szeretnénk kerülni. De tény, hogy szerzői engedély van, az eredeti szerző jogait nem sérti, és anyagi kárt nem okoz. Az angolszász gondolkodásmód persze érzékeli, hogy a hallgató ezzel jogosulatlan előnyhöz jut, és a korosztályi karrier-versenyben előbbre kerül, mint megérdemelné – de nálunk ez kevésbé fontos.
Plágium? Persze hogy az, még akkor is, ha többször is megemlíti a forrást.

b) A szakmai konferenciák egy része azzal is csábítja a szerzőket, hogy a konferenciára megírt cikkből nagyobb presztízsű folyóiratcikket lehet készíteni, mely hamar megjelenik a konferencia-célszámban. Ez jó. Csakhogy a konferenciacikk nyilvános, megjelenik az interneten, és így a folyóiratcikk bírálója azt látja, hogy ez bizony már megjelent. Igaz, hogy azonos a szerző, de ez mindössze azt jelenti: ez önplágium. A cikket elutasítják, mert nincs kellő mennyiségű új anyag benne.
A szerző bajban van. Számára a folyóiratcikk fontos. A konferenciacikk végleges szövege általában nincs elbírálva, ezért az elfogadás után a szerző dönti el, mit tesz bele. A szerző pedig eredményeinek egy részét visszatartja a konferenciacikkből: az úgyis megjelenik, és így a folyóiratcikk kellő új anyagot tartalmaz majd. Mindössze az történik, hogy a szerző szándékosan nem a lehető legjobb konferenciacikket írja meg. A jogot nem éri sérelem, csak éppen a közlemény eredeti célja (és a jó erkölcs) sérül.

Mindezeken a problémákon felül a folyóiratok egyre inkább üldözik az *önplágiumot*[3] is, amikor nem *mástól,* hanem korábbi saját cikk(ek)ből vesz át valaki részeket. A fenti 3 definíció erre nem vonatkozik, de az önplágium akkor is probléma, és a már publikált részek szó nélküli megismétlése csalás, akkor is, ha a szerző nem tulajdonít el semmit, saját magának pedig nyilván ad engedélyt (ez sokszor jogszerű, a kiadó az önmagától való átvételeket sokszor közvetlenül engedélyezi is),

[3] Lásd pl. `http://gofriblog.blogspot.hu/2014/09/doktor-plagium.html`.

csak éppen új információ publikálása helyett virtuálisan növeli meg közzétett műveinek számát vagy méretét.

A plágiumkereső programok mindkettő megtalálását segítik.

A plágium mint csalás

A fentiek miatt a plágium nem elsősorban jogi, hanem erkölcsi kategória. Jogi eszközökkel gyakran nem kezelhető. Létezik szerzői jogsértés is, de nem minden plágium jogsértés. Viszont minden plágium etikai vétség. *A lényeg a csalás:* arra irányul, hogy az olvasó elhiggye, hogy mi találtunk ki valamit, pedig nem … finom lelkiismeretű emberek számára még az *akaratlan plágium* is plágium: a félrevezetés még akaratlanul is félrevezetés.

A csalás természetét jól érzékelhetjük Moldova György kicsit abszurd írásából:

> „… Balaskó most már minden töprengés nélkül aláírta a kötelezvényt, melyben elismerte, hogy a „Gumikutya és Gumimacska Tröszt”-ben sem a termelésben, sem a fegyelem terén nem tapasztalt semmi kivetnivalót. Noch elégedetten nézte a papírt.
>
> – Rendben van, természetesen egy percig sem marad itt tovább, bízza csak rám. A továbbiakról majd kint tárgyalunk.
>
> Gyufát vett elő, és elégette a Balaskó által aláírt kötelezvényt. Balaskó értetlenül bámulta.
>
> – Mit csinál?
>
> – Én nem őrzöm páncélszekrényben ezeket az iratokat, elégetem őket, az sokkal hasznosabb, mert így fokozódik a levegő szenny- és aljasságtartalma, ami lényegesen megkönnyíti a munkámat.”
>
> (Moldova György: *Gumikutya*)

Valami ilyesmi a baj a szakdolgozat-másolással is. Nem is a tételes kár a fontos, hanem az, hogy a *dolgok lényegét éri sérelem* (a szakdolgozat megírása gyakorlás is lenne, és a tudást is bizonyítaná).

Mit szeretnénk elérni?

Azt tehát többé-kevésbé érzékeljük, mit *nem szeretnénk.* Azonban a mások munkájához való viszony ennél sokkal bonyolultabb. A tudományos kutatással és publikációval kapcsolatos elvárások között ezek is szerepelnek:

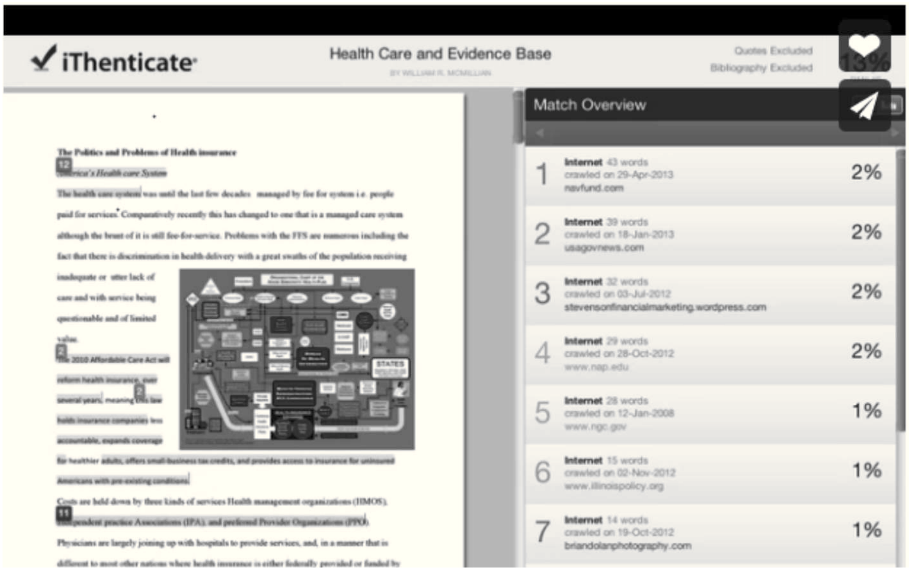
– mindenki (kutató, hallgató, különösen doktorandusz) ismerje és mutassa be mások kapcsolódó eredményeit,
– ehhez képest definiálja a sajátjait,
– világosan válassza el a kettőt.

Természetesen más a hallgató, és más a kutató. A hallgatótól nem feltétlenül várunk el új eredményt: sokszor mások eredményeinek megértése és saját gondolati körében való megfogalmazása elég. A kutatótól legalább minimális mennyiségű új eredményt várhatunk el.

A fenti követelmény egyrészt azt kívánja, hogy a szerző mások eredményeit összefoglalja, másrészt az, hogy ne másoljon. A kettő között azonban néha keskeny az ösvény. Még inkább az, ha eldöntésére az egyre divatosabb plágiumkereső programok egyikét használjuk.

Mérhető-e a hasonlóság?

A piacon több plágiumkereső program is elérhető ([2]–[7]) (sőt, maga a Google is használható – ugyan sok munkával – ilyen keresési feladatokra rövidebb szövegek esetén [8]).

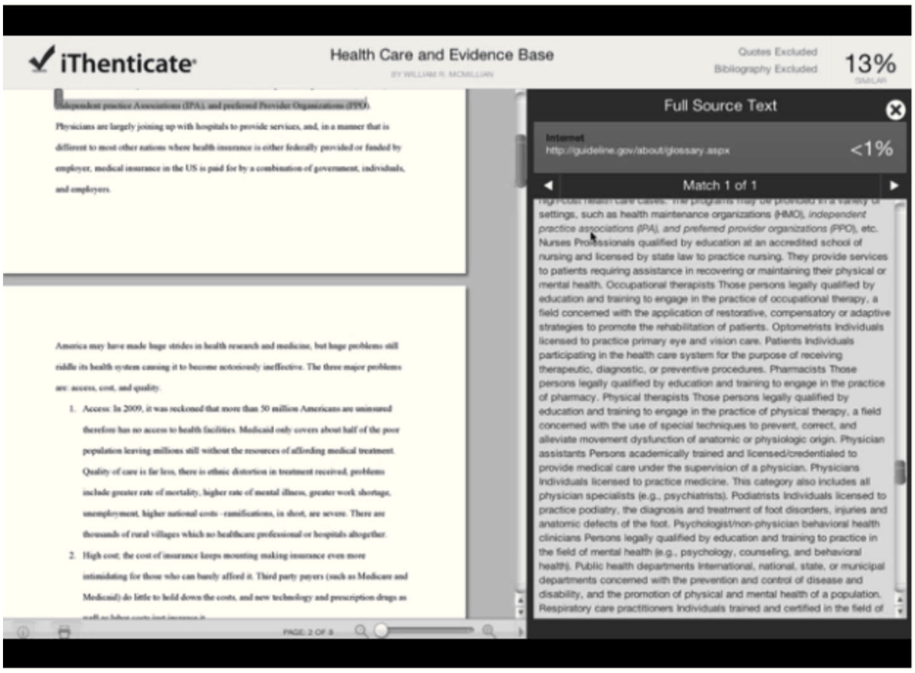


1. ábra. Találati oldal

Szempontok, melyek eldöntik, tudjuk-e használni:

- keresési adatok (feltöltött file-okban, vagy adott adatbázisokban, vagy a teljes interneten: ez utóbbi jószerivel a teljes Google funkcióját igényli),
- hozzáférés fizetős adatbázisokhoz is (például: IEEE Xplore, ScienceDirect, IOP, Wiley, Springer stb.),
- csak az angol nyelv kezelése vagy a magyar nyelv kezelése is (kódolások: Unicode, ISO-8859-2, ISO-8859-1, CWI, 852, Windows 1250, $\TeX$ stb.),
- az eredmények könnyen értékelhető bemutatása,
- ár (a jobb programok *cikkenként* 10–25 USD-t is elkérnek ...),

– a string-darabok összehasonlításánál intelligensebb keresés (szinonimák használata, több nyelv kezelése, lefordított szövegdarabok felismerése.



2. ábra. Azonos részmondatokat jelző oldal

Nyilvánvaló, hogy más szempontok dominálnak az oktatási célú vizsgálatoknál (szemináriumi dolgozat, beszámoló, esszé, szakdolgozat, diplomaterv), és mások a kutatási célú alkalmazásoknál (konferenciacikk/folyóiratcikk, értekezés stb.). Az biztos, hogy egy ilyen program csak a számára elérhető adatok között tud keresni, vagyis mondjuk a magyar nyelvű szakdolgozatok esetén az lenne az ideális, ha a hasonló tárgyú szakdolgozatok legalább öt-tíz évre legyenek feldolgozva, kezeljük a teljes magyar nyelvű *Wikipédiát,* az elérhető magyar nyelvű weboldalakat (lehetőleg a jelszóval védetteket is) és a fontosabb szakkönyveket (ebből copyright-probléma is lehet). Felmerülhet még az internetes hallgatói segédanyagok keresési célú kezelése akkor is, ha azok csak adott csoportok számára elérhetők. Meg kell oldanunk a frissítést (az új/javított oldalak megjelenés után hamar bekerüljenek). Gigászi feladat.

Mindenekelőtt le kell szögeznünk, hogy a plágiumkereső programok *nem plágiumot keresnek,* hanem a plágiumgyanús helyekre, illetve azok mennyiségére hívják fel a figyelmet. Az eredményt valakinek intelligensen értékelnie kell. Más dolog a hallgatói anyagok jelölt átvételeinek értékelése, és mások a szakcikkek részletei, megjelölve vagy anélkül. A szerzőtől elvárjuk, hogy a szakirodalom fontosabb részeit ismerje és összefoglalja, de ne essen a plágium vétkébe … Megint visszakanyarodhatunk a bevezető állításához: a lényeg az, hogy a szöveg

a) ne akarja félrevezetni az olvasót, más eredményét magunkénak feltüntetve, és
b) ne tartalmazzon az indokoltnál több megjelölt idézetet sem.

Becsüljük meg, hogy egy-egy azonosságra vonatkozó állítás mit is jelent![4] Ha a program azt állítja, hogy 2% az egyezés, akkor 1000 szavas saját dokumentum esetén[5] mindössze kb. 20 szóról van szó (ezek néhány szavas szókapcsolatokban), ami ötszavas szövegrészeket keresve oldalanként kb. 1 ilyen szókapcsolatot jelent, ami az egyszerű másolásnál azért kevesebb. Akkor már a 10% sem olyan rettenetesen sok … vigyázni kell tehát, hogyan értelmezzük az eredményeket.

Ugyanakkor az automata programok teljes cikkeket dolgoznak fel, ezt „vakon", vagyis csak az elérhető szöveget nézve (a szövegdarabokat nem osztályozva). Egy szerző két különböző cikke között a korrekt körülmények között is várható egyezések:

– cím szavai;
– szerzők és munkahelyek;
– a kivonat jelentős része;
– a bevezetés egy része;
– a szakirodalmi összefoglaló egy része;
– képletek;
– az összefoglalás jelentős része;
– köszönetnyilvánítás;
– irodalomjegyzék.

Szakcikkeknél *elvárjuk,* hogy a cikkek között megfelelő közös információtartalom legyen, ugyanakkor tiltjuk, hogy a szövegek között nagy átfedés legyes. Ez önmagában is ellentmondás. A számítógépek jelenlegi kapacitása pedig az internetes oldalak kezelésére nem is elég.

Teendőink

Oktatók: a diplomaterveknél és hasonló nagyobb műveknél az eltérő feladatok kiadása és a beadott írásművek alapos elolvasása lenne a legnagyobb segítség. Házi dolgozatok, esszék esetében azonban ezzel majdnem lehetetlen feladat elé állítjuk

[4] A `http://www.ithenticate.com/products/faqs` oldal szerint: „The results include a percentage score, called a „Similarity Index", which indicates how much of the document matches other sources. Please note that iThenticate does not determine whether a manuscript contains plagiarism. The service identifies content in a submitted manuscript that matches other sources, primarily to encourage the author of the manuscript to check that other sources have been properly cited."

[5] Alap-adatok:
– gépelt kisoldal $1250n \approx 160$ szó
– gépelt nagyoldal $1800n \approx 230$ szó
– B5-ös nyomtatott oldal $\sim 2200n \approx 265$ szó.

a tanárt. A hasonló/azonos feladat kiadása viszont erős kísértés a hallgató számára, ami ismét erkölcsileg aggályos.

Szerzők: szembe kell néznünk azzal, hogy ma már sok helyen segédprogramok futnak. Mindenki legyen tisztában azzal, hogy a legtisztább szándékok esetén is

– sose használjon azonos címet két különböző cikknél (átdolgozás esetén se),
– a kivonatok (absztraktok) és összefoglalások legyenek, amennyire lehet, eltérően megfogalmazva (ha más a cikk mondanivalója, akkor ez megoldható),
– ábrákat korábbi saját cikkeiből se vegyen át, ha a copyright nem sajátja. Ha szükségesek, tervezze át őket saját céljaira és rajzolja meg újra ennek megfelelően. Ez nemcsak szerzői jog kérdése, hanem a bíráló „ezt már láttam valahol” érzése is előkerülhet.
– mondatok, bekezdések átvétele sokszor bajt okoz, mindenesetre, ha szükség van rá, gondosan el kell látni idézőjellel, forrásmegadással,
– bizonytalan esetben jobb elkerülni az átvett részeket (magunktól is), az utólagos védekezés ártatlanság esetén is késő.

Következtetések

A plágium ténye egy-egy konkrét esetben eléggé világos, azonban még messze nincsen ténylegesen érdemben ellenőrző, megbízható program. Egyre jobb figyelmeztető programok azonban vannak, és arra lehet számítani, hogy a szerkesztők egyre jobban támaszkodni fognak rájuk. Jobb elkerülni a gyanút is … Ugyanakkor oktatóként/szerkesztőként nézzünk szembe a ténnyel, hogy segédprogramok nélkül a házilagos ellenőrzés szinte reménytelen. A hatékony számítógép-használat és a jó program drága. A végén pedig az intelligens emberi döntés megkerülhetetlen. Az ember kell, hogy kimondja az utolsó szót.

Hivatkozások

[1] `https://en.wikiquote.org/wiki/Potter_Stewart`
[2] `http://www.ithenticate.com/`
[3] `http://turnitin.com/`
[4] `http://www.grammarly.com/Plagiarism_Checker`
[5] `http://www.plagium.com/plagiarismchecker.cfm?language=en`
[6] `http://en.writecheck.com/`
[7] `https://kopi.sztaki.hu/`
[8] `http://www.google.hu/ http://www.google.com/`

A KÖZÖS CIKKEK ETIKÁJA

KATONA GYULA

A cikk a Magyar Tudományban (1989. 1. szám, 44–47. old.) megjelent cikk – a szerkesztőség engedélyével történő – másodközlése. (Akkori kiadó: Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat, jelenlegi kiadó: Akaprint Kft.) Bár a világ 1989 óta sokat változott, ezen cikk aktualitása változatlan. (Csillaggal jelöltük meg azt a néhány helyet, ami ma nem érvényes.) Mivel a matematikus kollegák közül kevesen olvasták – úgy gondoljuk – érdemes e fórumon újból megjelentetni. Hozzászólásokat, kiegészítéseket, vitacikkeket örömmel közlünk.

„Kérem szépen a közös cikkek titkai hálószobatitkok" – szokta volt mondani professzorom, a sajnos már sok éve elhunyt kiváló matematikus, Turán Pál. Valóban, amikor egy cikk címe alatt több név áll, az sok mindent jelenthet. A legritkább eset az, hogy a szerzők a cikk elkészülésének minden fázisában egyforma súllyal vettek részt. Nem is illik szellőztetni a részleteket egy-egy konkrét cikk esetében. Azonban az igazi „hálószobatitkokról", a szexről mégis nagyon sokat írnak, úgy általában. Elméletek, könyvek jelennek meg róla. Véleményem szerint a közös cikkek titkairól is kell beszélni, vitatkozni. A szerelmi erkölcsökről is sokféle vélemény van. A viták, az elméletek, a szent könyvek ellenére mindenki másképp csinálja. Azonban a vélemények fejlődnek, csiszolódnak, tudatosodnak és polarizálódnak. Az emberek legalább meg tudják magyarázni, miért csinálják azt, amit csinálnak. Kialakul, hogy mi az, amit az emberek többsége megengedhetetlennek tart. Úgy gondolom, ugyanez vonatkozik a közös publikációkra.

1987 őszén vitát kezdeményeztem a témáról a Matematikai Kutatóintézetben. Tartottam egy rövid vitaindítót, majd a kollégák mondták el gondolataikat. Ezt az eseményt szeretném most írásban visszaadni. A kollégák hozzászólásait név nélkül idézem, hiszen a) különben mindegyiküktől meg kellene kérdeznem, hozzájárul-e a hozzászólás közléséhez, b) pontos jegyzőkönyv híján senki sem tudja, mit mondtak pontosan, c) végül, itt írásban túlságosan nagy előnyben vagyok velük szemben, nálam van az utolsó szó lehetősége. Név nélkül ezek a problémák talán nem olyan súlyosak.

Mielőtt a részletekbe kezdenék, hadd említsem meg az egyik hozzászólást:

A. A.: Nem a szerző a fontos, hanem az olvasó. A tudomány számára mindegy, hogy ki írta a cikket. A cikk célja az, hogy az eredmények olvashatók legyenek, és további munkára ösztönözzenek. Tehát nem olyan fontos, hogy kik a szerzők.

A tudomány számára utólag valóban mindegy, hogy ki bizonyította be ezt vagy azt a tételt. De nem mindegy a szerzőknek! Ha a cikkek név nélkül jelennének meg, akkor nagy részük meg sem jelenne. A tudomány legfontosabb hajtóereje a becsvágy, a hiúság. De nem csak az önértékelésben fontosak az eredmények. A cikkek számának egyre növekvő szerepe van a pozíciók elnyerésében, a fizetések, jutalmak megállapításában. Ha valaki erkölcstelen módszerekkel válik sok cikk szerzőjévé, jobb tudósok pozícióját kaphatja meg, ez tehát mindannyiunk bőrére megy.

Közismert, hogy a közös cikkek száma nő. Azonban:

B. B.: A közös munka mennyisége nem nő. Egyszerűen érdemes közös cikkeket írni, hiszen azokat az összes szerzőnél egy egész cikknek számítják (bár vannak helyek, ahol nem, de a törtcikk-számítás egyéb nehéz problémákat vet fel).

E véleményben sok az igazság. Tapasztalataim szerint azonban a tudósok valóban egyre többet dolgoznak együtt. Az útiköltségek relatíve egyre olcsóbbak, egyre több a konferencia, így az azonos témán dolgozók egyre gyakrabban találkoznak. Egyre több a lehetőségük a közös munkára. A telefon használatának terjedése is ezt segíti. (Na persze nem hazánkban!)*

Hogyan keletkeznek a közös cikkek? Természetesen keletkezhetnek közös munkával. Ebben is lehetnek azonban lényegesen különböző helyzetek. Az egyenrangú felek közös munkája mellett ott van a tanár-tanítvány viszony, és egy még kényesebb helyzet, amikor az egyik fél a másiknak fizet (persze nem a saját zsebéből). Gyakran előfordul, hogy a szerzők az eredmény elérése után értesülnek róla, hogy más is eljutott egyidejűleg ehhez az eredményhez. Akkor határoznak úgy, hogy együtt publikálják azt. Végül előfordul, hogy valaki (pl. a lektor) a megjelenés alatt álló cikket megjavítja, és végül is közösen írják le a végleges változatot. De biztos vagyok benne, hogy előfordulnak más, itt fel nem sorolt esetek is, amiket kifelejtettünk.

Tanár és tanítvány együtt dolgoznak. Bizony ez is kényes viszony! Eleve aszimmetrikus. Az alaphelyzetben a tanár adja a problémát, ötleteket ad, a részleteket a tanítvány dolgozza ki. Sokszor a megfelelő probléma megtalálása, a helyes út kijelölése a lényeg. A többi csak rutinmunka. Máskor viszont a probléma megoldása, a bizonyítás megszülése a lényeg. Tehát csak a konkrét esetben dönthető el, milyen arányban vette ki részét a munkából a professzor és a diák.

De felmerül itt sok egyéb kérdés is. Mindkét oldalról számos személyes tapasztalatom van. Tulajdonképpen a tanár eleve eldöntheti, társszerző akar-e lenni, vagy sem. Hiszen helyzetéből adódóan eleve megcsinálhat a munkából annyit, amennyit szükségesnek érez a társszerzőséghez, de még ennek szintjét is elsősorban maga döntheti el. Más tanár viszont „visszatartja” magát, nem akar eredményt elérni a tanítvány területén, mert úgy érzi, hogy azzal a fiatal esélyeit rontja, ha a cikk közös lesz. Képzeljék el azonban érzéseit, ha egy másik, „felnőtt” kolléga beszáll, „segít” gyorsan a tanítványnak és ő lesz a társszerző.

Lehet, hogy annak a tanárnak van igaza, aki ilyenkor eleve társszerzőként lép fel, ellenkező esetben ugyanis sok energiája, munkája „elvész”, azaz nem jelenik meg saját publikáció formájában. Hiszen a problémák kitalálása, a tanítvány cikkének javítgatása sok energiáját emészti fel akkor is, ha a tulajdonképpeni új eredményből ő nem is csinált semmit. Mindenesetre szeretném felhívni kezdő kollégáim figyelmét arra, hogy segítő (és nem társszerző) tanárainknak cikkükben legalább mondjanak köszönetet. Magamnak is lelkiismeretfurdalásaim vannak ezzel kapcsolatban: Erdős Pálnak, Rényi Alfrédnak és Turán Pálnak annak idején nem köszöntem meg megfelelően a segítséget. Fiatal korában hajlamos az ember mindent saját zsenialitásának tulajdonítani.

Szeretném felhívni a figyelmet egy nem egészen idetartozó ellentmondásra. Ha valaki észrevesz egy fontos és érdekes összefüggést, de bebizonyítani nem tudja, „sejtés” formájában publikálja. Az irodalomban lassan elterjed az Y sejtése elnevezés. Később, sok-sok év után Z megoldja, bebizonyítja a sejtést. Ettől a pillanattól kezdve Y sejtése megszűnik, és megszületik Z tétele. Y neve átmenetileg megérdemelt dicsőséghez jutott, majd hirtelen ezt – lényegében teljesen – elvesztette.

Matematikában kevésbé szokott a tanár társszerzőként szerepelni, mint – hallomásaim szerint – más tudományágakban. Sőt, hazánkban még ritkábban, mint a nemzetközi átlag. Ennek talán az az oka, hogy egy matematikus megítélésében igen nagy súllyal szerepel tanítványainak mennyisége és minősége is. Ennek ellenére problematikus, hogy mi a helyes határ, mennyi munka esetén legyen a tanár társszerző.

C. C.: A kezdő örül, ha a Nagy Ember neve szerepel a cikken saját neve mellett.

D. D.: Igen, és így könnyebben „eladhatók” a gyenge cikkek is.

Hát igen. Egyenrangú felek közös munkája. Ez látszik a leginkább problémamentesnek. De valójában nem az. Képzeljük el, hogy ketten elhatározzák, közösen dolgoznak egy probléma megoldásán. Sokat beszélgetnek, rengeteg időt töltenek el a dologgal, de a megoldás csak nem akar kijönni. És egy szép napon egyikük kitalálja a bizonyítást. Mi a helyes ilyenkor? Az utóbbi egyedül írjon cikket, vagy közösen? Ez a „szélsőséges” helyzet gyakori; azonban szinte minden közös munkában egyenlőtlen a szerzők egyéni teljesítménye, de legalábbis a résztvevők úgy érzik. Talán az volna a helyes, ha a cikkben feltüntetnék, hogy melyik részt ki csinálta, melyik ötletért ki a felelős. Ennek azonban nincs hagyománya.

E. E.: Nagy különbség van az alkalmi és a rendszeres együttdolgozás között. Hiszen ekkor egyik cikkben az egyik, a másikban a másik csinál többet. Ez hosszú távon kiegyenlítődik.

Valóban jobban megvan ilyenkor erre a lehetőség. De a résztvevők képességeitől és jellemétől függően kialakulhatnak tartósan kiegyensúlyozatlan kapcsolatok is.

Végül egy sztori a témáról. Rényi Kató és Halász Gábor egy repülőúton matematikáról beszélgettek. Beszélgetés közben Rényi Katónak támadt egy gondolata, sikerült valamit megoldania. Közös cikket javasolt, amit Halász nem fogadott el, mondván, hogy ő nem csinált semmit. De – mondta Rényi Kató – a te jelenléted nélkül nem jutottam volna erre a gondolatra. Helyes – válaszolta Halász –, de akkor a pilótát is vegyük be, mert az ő közreműködése is szükséges volt. Nem lett belőle közös cikk.

Megfizetett társszerző. Az alcím ijesztően hangzik. Olyan esetről nem hallottam, sőt nem is tudom elképzelni a matematikusok körében, hogy valaki zsebből fizetne azért, hogy bevegyék társszerzőnek. De talán ez lesz a jövő? A szokásos helyzet az, hogy a kiváló magyar matematikust meghívja a kevésbé kiváló külföldi matematikus egy évre. Tanítani is kell, formálisan azért kapja a fizetést, de a legtöbbször a közös munka az igazi cél. Ez a közös munka sokszor kiegyensúlyozott, de gyakran nem. És kinek van ilyenkor bátorsága, vagy inkább „pofája” azt mondani, hogy ezt bizony én egyedül csináltam, amikor az ember annyira le van kötelezve. Saját tapasztalataimban sok minden előfordult. Volt meghívóm, aki gondosan ügyelt arra, hogy egyforma teljesítményünk legyen a közös cikkekben. Egy másik esetben viszont a kész, teljesen egyedül elért eredményeket kézirat formájában otthagytam leendő társszerzőmnél. Az évekig „ült” rajta, mert szégyellte, hogy nem csinált benne semmit, de lemondani se tudott a társszerzőségről. Végül is eredeti formájában jelent meg a cikk.

W külföldi meghívta X magyart. Közös cikket is írtak. Később W nekem panaszkodott:

– A közös cikket teljesen X csinálta. Én nem csináltam benne egyáltalán semmit. De ezt ő mindenhol hangoztatja.

Ez pontosan olyan, mintha nem is közös lenne a cikk, sőt talán még rosszabb. Na, most kit ítéljünk el? W-t vagy X-et?

De előfordulhat a külföldi meghíváshoz hasonló helyzet országon belül is. Az ipari vállalati befolyásos ember pl. félállás címén pénzt fizet a nála jobb kutatónak. Ennek keretében valamilyen alkalmazási munkán együtt dolgoznak. A helyzet és a problémák nagyon hasonlóak az előző esethez.

F. F.: Fel szeretném hívni a figyelmet arra, hogy mindkét esetben egy pozitív dolog esetleges negatív kísérőjelenségéről van szó. Hiszen aki a pénzt kapja, mindkét esetben jól jár anyagilag. Ezenkívül az első esetben az utazás tudását, látókörét szélesíti, míg a második esetben az együttműködés az elméleti kutató figyelmét a matematika alkalmazásai felé tereli, ami hasznos lehet neki is és a társadalomnak is.

Ijesztő híreket hallunk azonban más tudományokról. Sok helyen a főnök neve automatikusan a cikkre kerül (ráadásul nem is névsor szerinti helyére, hanem előre), pedig néha nem is tudja mi van a dolgozatban, „hiszen ő szerezte a pénzt”. Szerencsére ez a matematika tudományában teljesen ismeretlen, de elítélésére mindenütt szükség van, már csak azért is, nehogy nálunk is divatba jöjjön.

Utólagos társulások. Az alaphelyzet a következő. U. eredményét leírja, preprintjét szétküldi, és egyszer csak valahonnan meghallja, hogy ugyanazt az eredményt más is megcsinálta, de még az sem publikálta. Levelezés útján elhatározzák, hogy együtt írják meg a cikket. Ez tiszta ügy. A probléma ilyenkor csupán az a gyanú szokott lenni, hogy az egyik szerző csak állítja, hogy megcsinálta az eredményt. Feloldhatatlan probléma.

Egy hasonló eset. A professzor által felvetett problémát néhány hét múlva az egyik tanítvány megoldotta, a szemináriumon elmondta. A végén az egyik hallgató megjegyezte, hogy ő is ezt csinálta. Közösen írták meg a cikket. Mit lehet ilyenkor tenni? Csupán bízni.

Utólagos becsatlakozások. Tegyük fel, hogy a cikk elfogadható, a lektor okosabb, többet tud a témáról a szerzőnél. Ha társszerző akar lenni, könnyű dolga van. Lerövidíti a bizonyítást, összekapcsolja más eredményekkel, ügyesen általánosítja az eredményt. Javasolja az eredeti szerzőnek, hogy írják meg a dolgot együtt. Az még örül is, hiszen társszerzője jó nevű tudós, a cikk pedig valóban jobb lett. Szerencsére ez nem túl gyakori, de ismerek ilyen eseteket, és a veszély (?) nagy.

G. G.: Talán meg kellene tiltani, hogy a lektor társszerző legyen, viszont joga legyen kiegészítéseket fűzni a cikkhez, s ez a cikk után jelenne meg.

H. H.: Mi történjék akkor, ha a lektor egy lényegesen rövidebb bizonyítást talál? Hiszen közös publikálás esetén az eredeti szerzőnek semmilyen eredménye nem szerepel már a cikkben.

Nehéz kérdések. De hadd meséljem el egy saját élményemet. Találtam egy tételt, amellyel nem igen tudtam mit kezdeni. Úgy képzeltem, hogy jó volna, ha le lenne írva valahol, de túl könnyű volt a bizonyítás, szégyelltem leírni. Maradt a füzetemben. És akkor kaptam egy cikket lektorálásra, amiben a fent említett tétel egy speciális esete állt. Egy olyan speciális eset, amit már korábban más publikált. Ajánlatomra közös cikkben jelentettük meg az én általánosabb eredményemet. Társszerzővel már nem szégyelltem.

Összefoglalva, egyetlen dolgot tudok ajánlani: a nyíltságot. De nem azért, mert az most divat. * Írjunk a cikkeinkbe minél több részletet arról, hogy ki milyen részt végzett a munkából, mondjunk mindenért köszönetet, említsük meg kitől származik a probléma, és mi kitől hallottuk. Ezzel közelítünk az igazságossághoz, és csökkentjük a sértődések veszélyét.

Lehetséges, hogy az olvasó szívesebben kukucskált volna be konkrét személyek konkrét cikkeinek hálószobáiba, de talán ez az „elméleti" eszmefuttatás se untatta nagyon.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS